Faire ses gammes

Exercice 1 (Calcul de dérivées)

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer l'ensemble de définition D, l'ensemble de dérivabilité D' et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \exp(-a/x^2)$;
2. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin x}$;
3. $f : x \mapsto \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;
4. $f : x \mapsto \sqrt{1+\cos^2 x}$;
5. $f : x \mapsto (ax+b)^x$;
6. $f : x \mapsto x - a\sqrt{x}$;
7. $f : x \mapsto \arctan(e^x)$;
8. $f : x \mapsto \arcsin(x^2-1)$;
9. $f : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
10. $f : x \mapsto \arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;
11. $f : x \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$;
12. $f : x \mapsto \sin\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$;
13. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sin(2x)}$;
14. $f : x \mapsto \sin\left((2x+5)^2\right)$;
15. $f : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;
16. $f : x \mapsto \sqrt{\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}}$;
17. $f : x \mapsto \arcsin(\tan x)$;
18. $f : x \mapsto \mathrm{sh}x \, \sin x$;
19. $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$;
20. $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{ch}x)$;
21. $f : x \mapsto x^x$;
22. $f : x \mapsto \cos(x)\,\ln(1+x)$;
23. $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$;
24. $f : x \mapsto \arctan(\mathrm{ch}(x))$;
25. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(\arcsin(x))}$;
26. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$.

Correction.

1. $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2a}{x^3}\exp(-a/x^2)$;
2. $D = D' = \{x \in \mathbb{R}, x \not\equiv 0 \ [\pi]\}$, $f'(x) = -\dfrac{(2ax+b)\sin(ax^2+bx+1)\sin x + \cos(ax^2+bx+1)\cos x}{\sin^2 x}$;
3. $D = D' =]-\infty, a[\cup]0,+\infty[$, $f'(x) = \left(\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) - \dfrac{a}{a+x}\right)\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;
4. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{\cos x \, \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;
5. $D = D' = \left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$, $f'(x) = \left(\ln(ax+b) + \dfrac{ax}{ax+b}\right)(ax+b)^x$;
6. $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$;
7. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2}{\mathrm{ch}x}$;
8. $D = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $D' = \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

9. $D =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, $D' =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x < -2 \end{cases}$;

10. $D = \{x \in \mathbb{R}, x \not\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\}$, $D' = \{x \in \mathbb{R}, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$,
$$f'(x) = -\frac{1}{2}\text{signe}(\cos x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x < 0\,; \end{cases}$$

11. $D = D' = \{x \in \mathbb{R}, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x\, \cos^2 x\,(\cos x - 3)}{(1-\cos x)^3}$;

12. $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$;

13. $D = D' = \{x \in \mathbb{R}, x \not\equiv 0\ [\pi/2]\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin(2x) - 2(x+1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$;

14. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (8x+10)\cos\left((2x+5)^2\right)$;

15. $D = \mathbb{R}_-$, $D = \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$;

16. $D = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $D' = \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}}}$;

17. $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right[$, $f'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$;

18. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \text{ch}(x)\sin(x) + \text{sh}(x)\cos(x)$;

19. $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

20. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}$;

21. $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$;

22. $D = D' =]-1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+x} + \sin x\, \ln(1+x)$;

23. $D = D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2\pi\, k, \pi + 2\pi\, k[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

24. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\text{sh}x}{1+\text{ch}(x)^2}$;

25. $D = [-1, 1]$, $D' =]-1, 1[$, $f'(x) = -\dfrac{\text{ch}(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}\,\text{sh}(\arcsin x)^2}$;

26. $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{(\cos x + 2)^4} + \dfrac{4\sin^2 x}{(\cos x + 2)^5}$.

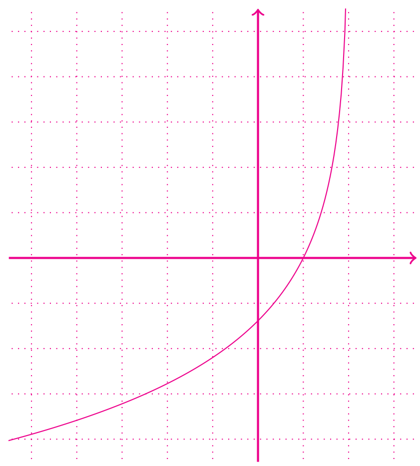
Exercice 2 (Tracé de graphes)

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes, puis tracer rapidement leur graphe.

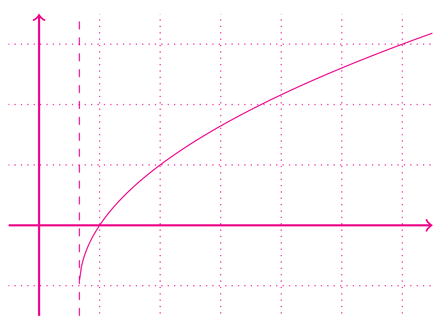
$$f(x) = 2\ln\frac{1}{2-x}\,; \qquad g(x) = \sqrt{3x-2} - 1\,; \qquad h(x) = \frac{4}{2x+1} + 3.$$

Correction.

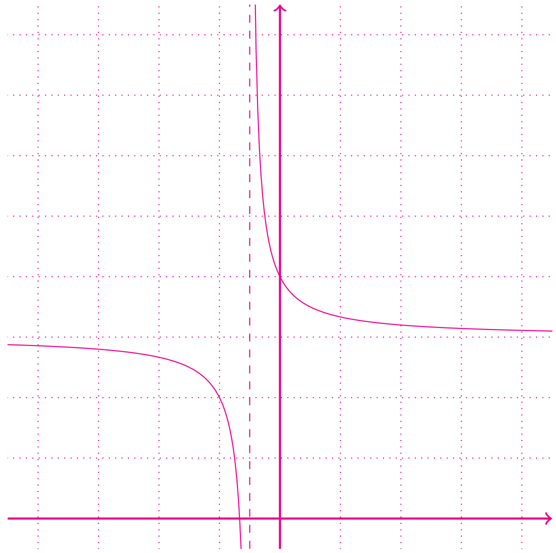
- $f(x)$ est défini pour les x tels que $\dfrac{1}{2-x} > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x < 2$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } D_f =]-\infty, 2[}$.
  On constate que $\forall x \in D_f,\ f(x) = -2\ln(2-x)$, ce qui permet de tracer le graphe de la fonction f en connaissant celui du logarithme, en lui appliquant une réflexion verticale d'axe $x = 1$ et une dilatation verticale de coefficient $a = -2$.



- $g(x)$ est défini pour les x tels que $3x-2 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq 2/3$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est définie sur } D_g = [2/3, +\infty[}$.
  On peut aisément tracer le graphe de la fonction g en connaissant celui de la racine carrée.



- $h(x)$ est défini si et seulement si $x \neq -1/2$. Donc $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}}$. On peut aisément tracer le graphe de l'application h en connaissant celui de la fonction inverse.



Exercice 3 (Étude de fonctions)

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

(i) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$

(ii) $f : x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$

(iii) $f : x \longmapsto \ln(x^2-1)$

(iv) $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$

(v) $f : x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$

(vi) $f : x \longmapsto x \arctan \dfrac{1}{x}$

(vii) $f : x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$

Correction.

i) L'expression donnée a un sens dès que $x \neq \pm\sqrt{3}$ donc $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.
En tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire, $\boxed{f \text{ est impaire}}$. Nous allons donc l'étudier sur $E = \mathbb{R}_+ \setminus \{\sqrt{3}\}$.
La fonction f est dérivable par opérations.
Soit $x \in E$. On a

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3(2x)}{(x^2-3)^2}.$$

Le dénominateur étant > 0, $f(x)$ est du même signe que

$$3x^2(x^2-3) - x^2(2x) = x^2(3x^2 - 9 - 2x^2) = x^2(x^2-9) = x^2(x-3)\underbrace{(x+3)}_{>0}.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant de f sur E.

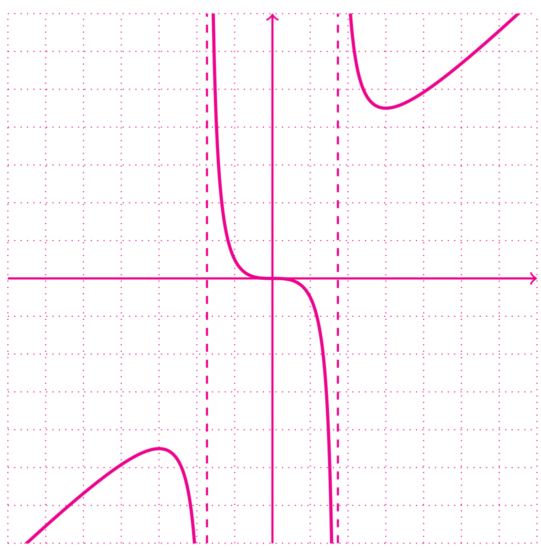
x	0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
f'	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$9/2$	$\nearrow$	$+\infty$

La seule limite un peu subtile est celle en $+\infty$, que l'on obtient en factorisant numérateur et dénominateur par les termes prépondérants : quel que soit $x \in E$, on a $\dfrac{x^3}{x^2-3} = x\dfrac{1}{1-\frac{3}{x}}$. Comme on a $\dfrac{1}{1-\frac{3}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, il s'ensuit $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Montrons que C_f admet une asymptote oblique en $+\infty$. On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1-\frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ puis

$$f(x) - x = ... = \frac{3x}{x^2-3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

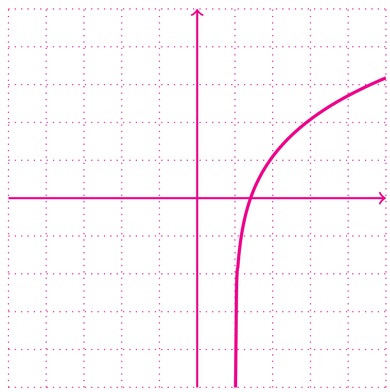
Ainsi, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$.
Voilà enfin le graphe de f.



ii) $f : x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$ est définie sur $D =]1, +\infty[$.
Pour tout $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x}{x^1-1} > 0$ donc f est strictement croissante sur D.
De plus, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	1		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit le graphe de f.



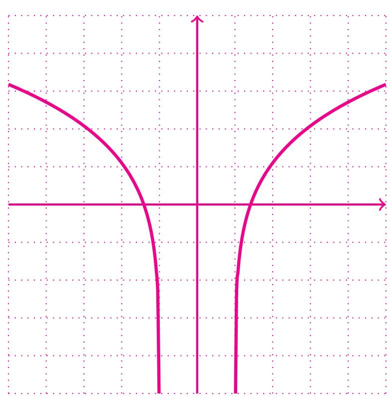
iii) L'expression donnée a un sens si et seulement si $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x^2 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $|x| > 1$.

$f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ est donc définie sur $D :=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Puisque $\boxed{f \text{ est paire}}$, nous allons simplement l'étudier sur $]1, +\infty[$.

Sur $]1, +\infty[$, la fonction f coïncide avec la fonction précédente.

Voilà enfin le graphe de f.



iv) On voit directement que l'expression $\dfrac{\ln|x|}{x}$ a un sens si et seulement si $x \neq 0$. Pour déterminer quand cette quantité est ≥ 0 (de telle sorte que sa racine carrée soit définie), on peut par exemple procéder à une disjonction de cas :

- si $x \in]-\infty, -1[$, $\ln|x| > 0$ et $x < 0$, donc le quotient est strictement négatif et la racine carrée n'est pas définie ;

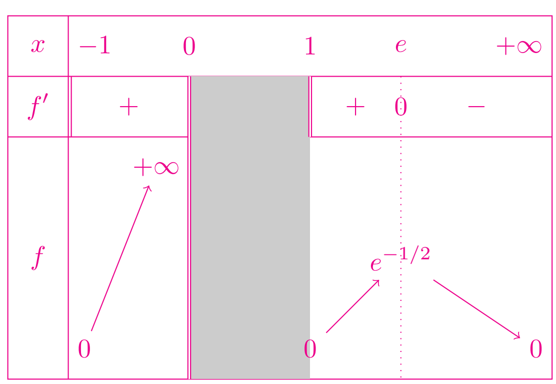
- si $x \in [-1, 0[$, $\ln|x| < 0$ et $x < 0$, donc le quotient est positif et la racine carrée est définie ;
- si $x \in]0, 1[$, $\ln|x| < 0$ et $x > 0$, donc le quotient est strictement négatif et la racine carrée n'est pas définie ;
- si $x \in [1, +\infty[$, $\ln|x| > 0$ et $x > 0$, donc le quotient est positif et la racine carrée n'est pas définie.

L'expression donnée a donc un sens si et seulement si $x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$, ce qui nous donne une fonction

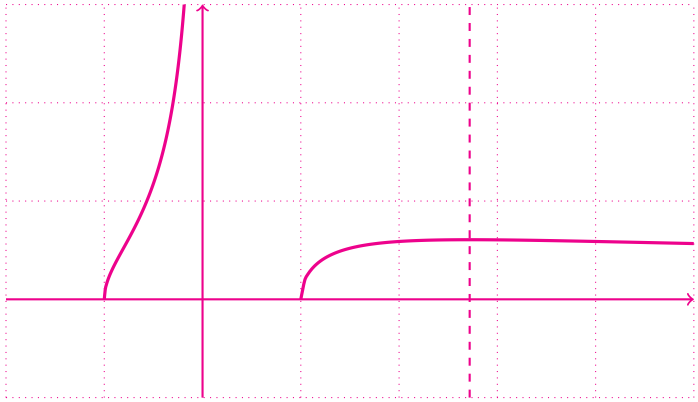
$$f : \begin{array}{rcl} [-1,0[\cup[1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}. \end{array}$$

- Sur $[-1, 0[$, la fonction f peut se réécrire $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln(-x)}{x}}$. Comme la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 0[$.
  Soit $x \in]-1, 0[$. On a
  $$f'(x) = \frac{\dfrac{1-\ln(-x)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{\ln(-x)}{x}}},$$
  qui est du même signe que $1 - \ln(-x)$, c'est-à-dire > 0.
- Sur $[1, +\infty[$, la fonction f peut se réécrire $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$. Comme la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
  Soit $x \in]1, +\infty[$. On a
  $$f'(x) = \frac{\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}},$$
  qui est du même signe que $1 - \ln x$.

On obtient ainsi le tableau de variations de f.



Voici enfin le graphe de f.



v) L'expression donnée est définie si et seulement si $x \in D_{\tan}$ et $\tan(x) \neq 0$ et $2x \in D_{\tan}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x & \in D_{\tan} \\ \tan(x) \neq & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \\ x \not\equiv 0 & \mod \pi \end{cases}$$
$$\iff x \neq 0 \mod \pi/2.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\tan(2x)}{\tan(x)} \text{ bien définie } \iff \begin{cases} x & \in D_{\tan} \\ \tan(x) \neq & 0 \\ 2x & \in D_{\tan} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \\ x \not\equiv 0 & \mod \pi \\ 2x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \not\equiv 0 & \mod \pi/2 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{4} & \mod \pi/2 \end{cases}$$
$$\iff x \not\equiv 0 \mod \pi/4.$$

Ainsi, si l'on définit : $\boxed{D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \mod \pi/4 \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\frac{\pi}{4}, (k+1)\frac{\pi}{4} \right[}$, on a une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\tan(2x)}{\tan x} \end{array}.$$

Le domaine D est (clairement) $\frac{\pi}{4}$-périodique et symétrique. Quotient de deux fonctions impaires, la fonction f est paire. Quotient de deux fonctions π-périodiques, f est π-périodique. On va donc se contenter de l'étudier sur $E = \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Première méthode. La fonction f est dérivable par opérations. Soit $x \in E$. On a (en utilisant la formule $\tan' = 1/\cos^2$, ici plus judicieuse car elle donne des expressions plus factorisées)

$$f'(x) = \frac{2\frac{1}{\cos^2(2x)} \tan x - \tan(2x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}.$$

Comme $\tan^2 x > 0$ (car $x \in D$), cette expression a le même signe que son numérateur. On peut en fait encore la simplifier davantage en multipliant par $\cos^2(x)\cos^2(2x)$, également > 0 car $x \in D$ (donc $x, 2x \in D_{\tan}$) : $f'(x)$ est du même signe que

$$\begin{aligned} 2\tan(x)\cos^2(x) - \tan(2x)\cos^2(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(2x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x) - \sin(2x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x)(1-\cos(2x)). \end{aligned}$$

Or, comme $x \in E$, on a $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin(2x), 1-\cos(2x) > 0$.

On a donc montré que $\forall x \in E, f'(x) > 0$, ce qui montre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles qui constituent E, c'est-à-dire $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Deuxième méthode.

La formule d'addition de la tangente permet de voir que

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{2}{1-\tan^2(x)}.$$

La fonction f est la composée de fonctions usuelles dont on connaît le sens de variations sur chaque intervalle composant E. On obtient directement que f est strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles.

On obtient alors le tableau de variations de f sur E.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$+$	||	$+$	||
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0 ||

Justification des limites.

(a) La limite en 0^+ est la plus délicate à déterminer. Il y a au moins deux possibilités :

- on utilise la formule alternative que l'on a énoncée en remarque, en ajoutant que, par continuité de la fonction tangente, on a $\tan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$;
- on utilise le fait que la fonction tan (resp. $x \mapsto \tan(2x)$) est dérivable en 0, de dérivée 1 (resp. 2), ce qui donne, par définition, les limites des taux d'accroissement

$$\frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\tan(2x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

En passant au quotient, on obtient
$$\frac{\tan(2x)}{\tan x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

(b) Les limites en $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\pm}$ sont plutôt faciles. Par continuité de tan en $\frac{\pi}{4}$, on a

$$\tan(x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}^{\pm}]{} \tan\frac{\pi}{4} = 1,$$

donc

$$\tan(x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}^{-}]{} +\infty \qquad \text{et } \tan(2x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}^{+}]{} -\infty.$$

(c) On a, par exemple par continuité de tan en π, que

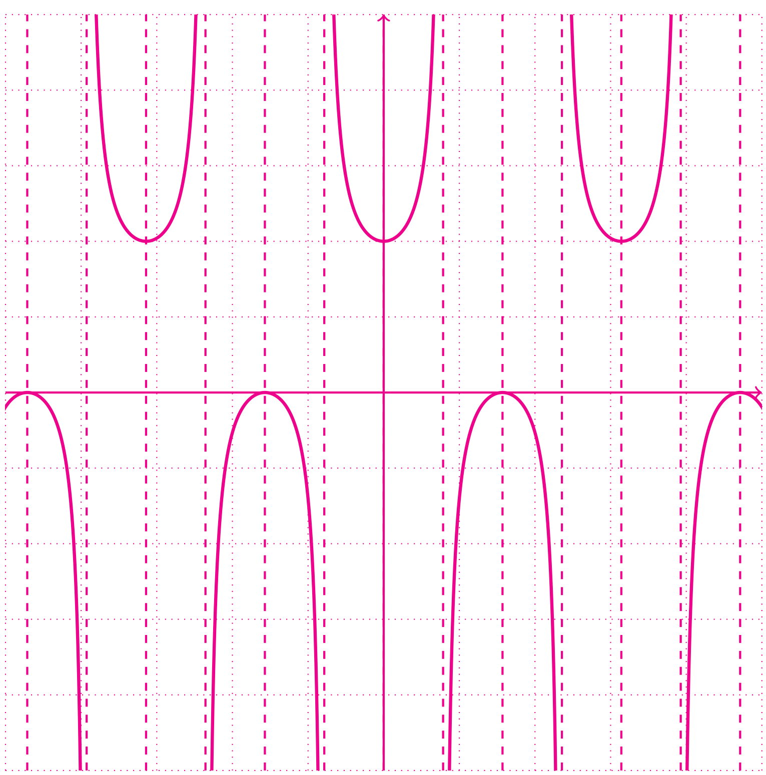
$$\tan(2x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0.$$

Comme en outre $\tan x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^{-}]{} +\infty$, on en déduit

$$\frac{\tan(2x)}{\tan x} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^{-}]{} 0.$$

Encore une fois, c'était également faisable (et facile) avec la formule alternative.

Voici le graphe de f, prolongé par parité et périodicité.



vi) La formule donnée a un sens pour $x \neq 0$ et définit une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \arctan \frac{1}{x}. \end{array}$

Cette fonction est paire en tant que produit de deux fonctions impaires (le deuxième facteur $x \mapsto \arctan \frac{1}{x}$ étant impair comme composée de deux fonctions impaires). Nous allons donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction f est dérivable par opérations.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan \frac{1}{x} + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Déterminer le signe de cette expression n'est pas aisé, mais on peut constater que la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est à son tour dérivable par opérations (autrement dit, f est deux fois dérivable) et calculer f''.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1 + x^2 - x\,2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

On obtient alors successivement un tableau de variations pour f', ce qui nous donne son signe, et nous donne alors le tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
f''		$-$	
f'	$?$	$\searrow$	0
f	0	$\nearrow$	1

Justification des limites.

(a) Commençons par la limite de f' en $+\infty$.

(b) L'expression donnée ayant clairement un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient une fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(3x) + 3\sin(x). \end{array}$

La fonction étant impaire et 2π-périodique, on va l'étudier sur la demi-période $D = [0, \pi]$.

La fonction f est dérivable par opérations.

Soit $x \in D$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(3x) + 3\cos(x) \\ &= 3\left(\cos(3x) + \cos(x)\right). \end{aligned}$$

Commençons par déterminer les zéros de cette dérivée. Soit $x \in D$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \cos(3x) = -\cos(x) \\ &\iff \cos(3x) = \cos(\pi + x) \\ &\overset{\star}{\iff} 3x \equiv \pi + x \mod 2\pi \text{ ou } 3x \equiv -(x+\pi) \mod 2\pi \\ &\overset{\star\star}{\iff} 2x \equiv \pi \mod 2\pi \text{ ou } 4x \equiv \pi \mod 2\pi \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi/2 \\ &\overset{\star\star\star}{\iff} x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}\right) \\ &\iff x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Justifications.

- $\star$ Cas d'égalité des cosinus.
- $\star\star$ Car $-\pi \equiv \pi \mod 2\pi$.
- $\star\star\star$ Car $x \in [0, \pi]$.

En calculant des valeurs de f' (par exemple en 0, $\pi/3$, $2\pi/3$ et π), on obtient donc le tableau de signes de f', ce qui nous donne le tableau de variations de f.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Voici le graphe de f, prolongé par imparité et périodicité. Attention, le repère n'est pas orthonormé.

vii) $f : x \mapsto \sin(3x) + 3\sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
Restreignons son étude à $[0, \pi]$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = 3\cos(3x) + 3\cos x = 3[\cos(3x) + \cos x] + 6\cos(2x)\cos x.$$

On obtient le tableau de variations suivant : A FAIRE.
Bonus : on peut montrer que $x = \dfrac{\pi}{2}$ est axe de symétrie.
Bonus : $f'(0) = \pi$ donc on peut tracer la tangente au point d'abscisse 0.
Tracer la courbe de f.

Exercice 4 (Des équations/inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(i) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$

(ii) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

(iii) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

(iv) $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$

(v) $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln x - 1$.

Correction.

(i) Notons $\mathcal{D}_1$ l'ensemble de définition de la première équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_1 &\iff \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) \text{ et } \ln x \text{ existent} \\ &\iff \frac{x+3}{2} > 0 \text{ et } x > 0 \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}_+^*}$.

Considérons désormais $x \in \mathcal{D}_1$. On a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} &\iff \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln\sqrt{3x} \\ &\iff \frac{x+3}{2} = \sqrt{3x} \\ &\iff \frac{(x+3)^2}{4} = 3x \\ &\iff (x+3)^2 = 12x \\ &\iff x^2 - 6x + 9 = 12x \\ &\iff (x-3)^2 = 0 \\ &\iff x = 3. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S_1 = \{3\}}$.

(ii) On a $\boxed{\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}}$ et les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} &\iff 3^{2x}(1+3^{-1}) = 2^x(2^{\frac{7}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}) \\ &\iff \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{2^{\frac{1}{2}}(2^3+1)}{\frac{4}{3}} \\ &\iff \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9\times 3}{4\times 2^{-\frac{1}{2}}} \\ &\iff \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9\times\sqrt{9}}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{9}{2}\right)^{3/2} \\ &\iff x = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

où la dernière équivalence se justifie par le fait que la fonction $x \mapsto a^x = e^{x\ln a}$ est injective, cela pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Ainsi, $\boxed{S_2 = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$.

(iii) On a $\boxed{\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}}$. Comme $\sqrt{0} = 0$ et $0^0 = 1$, $\underline{0 \text{ est solution}}$. Considérons désormais $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} &\iff e^{x \ln \sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x} \\
&\iff x \ln \sqrt{x} = \sqrt{x} \ln x \\
&\iff \frac{1}{2} x \ln x = \sqrt{x} \ln x \\
&\iff \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln x \left[\sqrt{x} - 2\right] = 0 \\
&\iff \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} - 2 = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4 \\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 && \text{car } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_3 \cap \mathbb{R}_+^* = \{1, 4\}$, puis $\boxed{S_3 = \{0, 1, 4\}}$.

(iv) Notons $\mathcal{D}_4$ l'ensemble de définition de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D}_4 \iff (2x + 1 \geq 0 \text{ et } x + 3 \neq 0) \iff x \notin \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_4 = \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}}$.
Soit désormais $x \in \mathcal{D}_4$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln|2x + 1| + \ln|x + 3| < \ln 3 &\iff \ln|(2x + 1)(x + 3)| < \ln 3 \\
&\iff |(2x + 1)(x + 3)| < 3 \\
&\iff \left\{\begin{array}{c} (2x + 1)(x + 3) < 3 \\ \text{et} \\ (2x + 1)(x + 3) > -3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{c} 2x^2 + 7x < 0 \\ \text{et} \\ 2x^2 + 7x + 6 > 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{c} x \in \left]-\frac{7}{2}, 0\right[\\ \text{et} \\ x \in]-\infty, -2[\cup]-3/2, +\infty[\end{array}\right. \\
&\iff x \in \left]-\frac{7}{2}, -2\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, 0\right[.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $x \in \mathcal{D}_4$ (ne pas l'oublier !!!), on a

$$\boxed{S_4 = \left]-\frac{7}{2}, -3\right[\cup]-3, -2[\cup \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 0\right[}.$$

(v) L'inéquation est définie sur $]1,+\infty[$. Soit $x \in]1,+\infty[$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
\ln(x-1)+\ln(x+1) < 2\ln x - 1 &\iff \ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln x < -1 \\
&\iff \ln\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} < -1 \\
&\overset{\text{(a)}}{\iff} \frac{x^2-1}{x^2} < \frac{1}{e} \\
&\iff 1-\frac{1}{x^2} < \frac{1}{e} \\
&\iff \frac{1}{x^2} > 1-\frac{1}{e} \\
&\iff \frac{1}{x^2} > \frac{e-1}{e} \\
&\overset{\text{(b)}}{\iff} x^2 < \frac{e}{e-1} \\
&\overset{\text{(c)}}{\iff} x < \sqrt{\frac{e}{e-1}}.
\end{aligned}$$

Justifications.

(a) Par stricte croissance de l'exponentielle (dans le sens direct) et du logarithme (dans le sens réciproque).

(b) Par stricte croissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et parce que $\left(x^2, \dfrac{e}{e-1}\right) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

(c) Par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ (dans le sens direct) et de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (dans le sens réciproque), et parce que les nombres en présence sont tous > 0.

Exercice 5 (Inégalités polynomiales et rationnelles)

Montrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$;

(ii) $\forall x \in \,]0,4[\, \setminus \{1\},\ \left|\dfrac{x+2}{1-x}\right| \geq 2$;

(iii) $\forall x \in [0,2],\ \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x+1}{x^2+3} \leq \dfrac{1}{2}$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ -\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{x+1}{x^2+3} \leq \dfrac{1}{2}$.

Correction.

(i) Étudions la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x} \end{array}$. Elle est dérivable par opérations, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, ce qui permet d'obtenir le tableau de variations suivant, qui conclut.

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

(ii) **Méthode 1.** La fonction $g : \begin{array}{ccc} [0,4] \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+2}{1-x} \end{array}$ est dérivable, et $\forall x \in [0,4] \setminus \{1\},\ g'(x) = \dfrac{3}{(1-x)^2} > 0$, ce qui permet d'obtenir le tableau de variations suivant, qui montre

$$\boxed{\forall x \in [0,1[\,,\ g(x) \geq 2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall x \in \,]1,4]\,,\ g(x) \leq -2},$$

ce qui conclut.

x	0		1		4
g'		$+$	‖	$+$	
g	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2

Méthode 2. Soit $x \in]0,4[\setminus\{1\}$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+2}{1-x}\right| \geq 2 &\iff \left(\frac{x+2}{1-x}\right)^2 \geq 4\\ &\iff (x+2)^2 \geq 4(1-x)^2\\ &\iff x^2+4x+4 \geq 4x^2-8x+4\\ &\iff 3x^2-12x \leq 0\\ &\iff 3x(x-4) \leq 0.\end{aligned}$$

Or, $0 < x < 4$, donc $x > 0$ et $x-4 < 0$, d'où $3x(x-4) < 0$.

D'après les équivalences précédentes, on a bien $\boxed{\left|\frac{x+2}{1-x}\right| \geq 2}$.

Méthode 3. Par disjonction, selon si $x \in]0,1[$ ou si $x \in]1,4[$.

Dans le cas où $x \in]1,4[$, on a $1-x < 0$ et $x+2 > 0$, donc $\left|\frac{x+2}{1-x}\right| = \frac{x+2}{x-1}$, et

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+2}{1-x}\right| \geq 2 \iff \frac{x+2}{x-1} \geq 2 &\iff x+2 \geq 2(x-1)\\ &\iff x \leq 4.\end{aligned}$$

Or, $x \leq 4$ donc par équivalences, $\boxed{\left|\frac{x+2}{1-x}\right| \geq 2}$.

Traitez le deuxième cas.

(iii) et (iv) La fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x^2+3} \end{array}$ est dérivable par opérations et $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -\frac{x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$. Le dénominateur de cette fraction étant strictement positif, il suffit de déterminer le signe du numérateur (qui est un trinôme du second degré de racines plus ou moins évidentes 1 et -3) pour déterminer le signe de h' et donc le tableau de variations de f. Tout calcul fait, on trouve le tableau de variations suivant, qui conclut.

x	$-\infty$		-3		0		1		2		$+\infty$
h'		$-$	0		$+$		0		$-$		
h	0	↘	$-1/6$	↗	$1/3$	↗	$1/2$	↘	$3/7$	↘	0

Exercice 6 (Simplification)

Pour $x > 1$, simplifier l'expression $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$.

Correction. Pour $x > 1$, on a :

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \ln x\right) = \exp(\ln(\ln x)) = \ln x.$$

Fonctions exponentielles et puissances

Exercice 7 (Utilisation du TVI)

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Correction.

1. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln x \end{array}$$

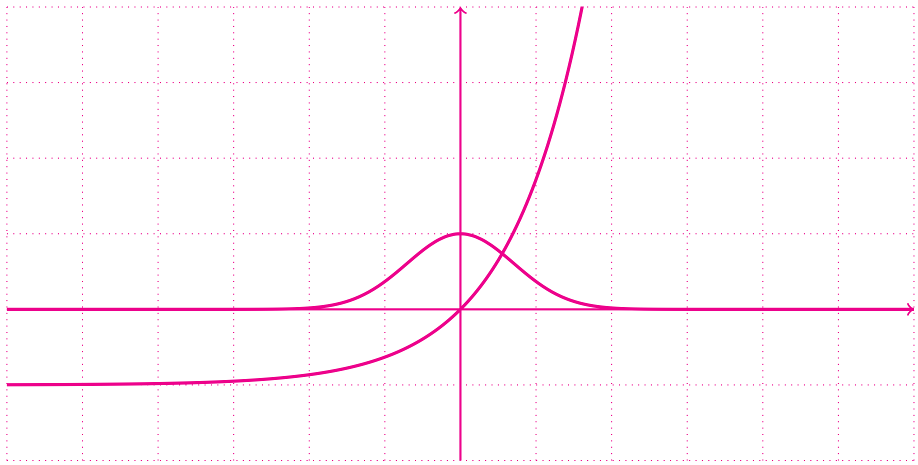
est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 + \ln x$.
On en déduit le tableau de variations suivant (la limite en 0 étant déterminée par croissance comparée).

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$			
f	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f prend des valeurs négatives sur $]0, 1]$ et qu'elle induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, le nombre 1 admet un unique antécédent sur $\mathbb{R}_+^*$ (dont on sait même qu'il est ≥ 1), ce qui montre le résultat voulu.

Remarque. La solution de cette équation n'a pas d'expression en termes des fonctions usuelles.

2. On peut répondre à cette question sans aucun calcul de dérivée, notamment si on a une idée du graphe des deux fonctions en présence.



Il est clair que l'équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_-^*$ (si $x<0$, on a $e^{-x^2}>0>e^x-1$). Il s'agit donc de montrer que cette équation a en outre une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction

$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^{-x^2}-e^x+1\end{array}$$

est strictement décroissante, en tant que différence de $x\mapsto e^{-x^2}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (par composition), et de $x\mapsto e^x-1$, strictement croissante.

Puisque g est continue, que $g(0)=1$ et que $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$, le théorème de la bijection monotone entraîne que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty,1]$.

En particulier, il existe un unique $x\in\mathbb{R}_+$ tel que $g(x)=0$.

D'après ce qui précède, l'équation $e^{-x^2}=e^x-1$ possède bien une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (Fonction *W* de Lambert)

Soit $W:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction, que l'on ne suppose pas dérivable a priori. On suppose que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ W(x)\,e^{W(x)}=x.$$

Déterminer les variations de W.

Correction. Réponse 1. Introduisons la fonction $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+\\ t & \mapsto & te^t\end{array}$. La relation de l'énoncé se traduit alors sous la forme plus concise $g\circ W=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ $(\star)$. La fonction W est donc inversible à gauche.

Étudions g. La fonction g est dérivable et $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ g'(t)=(1+t)e^t>0$, donc g est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc injective.

> **Méthode 1.** La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ est surjective, donc d'après $(\star)$, la composée $g\circ W$ est surjective, donc g est surjective.
> **Méthode 2.** De plus, g est continue, donc d'après le théorème de la bijection monotone, g induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+)=]\lim\limits_0 g,\lim\limits_{+\infty}g[=]0,+\infty[=\mathbb{R}_+$.

Dans tous les cas, on en déduit que g est une bijection strictement croissante.

En composant à gauche l'égalité $(\star)$ par g^{-1} (qui existe d'après ce qui précède), on obtient $\boxed{W=g^{-1}}$.

La fonction $\boxed{W \text{ est alors strictement croissante}}$, en tant que bijection réciproque d'une bijection strictement croissante.

Réponse 2. On conjecture que W est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on le montre $\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ x<y\Longrightarrow$

$W(x) < W(y)$, par contraposée.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $W(x) \geq W(y)$. Montrons $x \geq y$.
Par croissance de exp, on a $0 < e^{W(y)} \leq e^{W(x)}$.
Par hypothèses, on a aussi $0 \leq W(y) \leq W(x)$.
En multipliant ces inégalités positives, on a $0 \leq W(y)e^{W(y)} \leq W(x)e^{W(x)}$, c'est-à-dire $y \leq x$.
On en déduit que $\boxed{W \text{ est strictement croissante}}$.

Exercice 9 (Une inégalité)

Montrer que $\quad \forall\, x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.

Correction. Posons

$$f : \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^x(1-x)^{1-x} = \exp\left(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)\right). \end{array}$$

Posons enfin, dans un souci de simplicité,

$$g : \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln x + (1-x)\ln(1-x). \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ (par somme de telles fonctions), et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in]0,1[, \quad g'(x) &= \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 \\ &= \ln x - \ln(1-x). \end{aligned}$$

Par stricte croissance du logarithme, le signe de cette expression (c'est-à-dire la position relative de $\ln x$ et $\ln(1-x)$) ne dépend que de la position relative de x et de $1-x$. On dresse alors facilement le tableau de variations suivant.

x	0		$1/2$		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$?$	$\searrow$	$\ln\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$?$

Cela démontre $\forall x \in]0,1[,\ g(x) \geq \ln\dfrac{1}{2}$.

La fonction exponentielle étant croissante, on a : $\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) \geq \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 10 (Exponentielle et Taylor)

Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Correction. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ »}$$

Il peut être utile de poser $f_n : x \mapsto e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ de sorte que $\mathcal{H}_n$ s'énonce :

$$\mathcal{H}_n : \text{« la fonction } f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+ \text{ »}$$

Initialisation.

Par croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geq e^0$$

Or $e^0 = 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!}$.

D'où $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

La fonction f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'_{n+1}(x) &= e^x - \sum_{k=0}^{n+1} k\frac{x^{k-1}}{k!} \\ &= e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \\ &= f_n(x).\end{aligned}$$

D'après $\mathcal{H}_n$, la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que la fonction f'_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Donc la fonction f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $f_{n+1}(0) = 0$.
Donc f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre l'hérédité et conclut la récurrence.

Exercice 11 (Encadrement de e)

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

Correction. Soit $n \geq 2$. Grâce aux fonctions ln / exp, l'encadrement souhaité est équivalent à

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On a l'inégalité de convexité : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x - 1$. En appliquant cette inégalité à $1 \pm \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}_+^*$ (car $n \geq 2$), on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1,$$

et

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 1,$$

ce qui conclut.

Exercice 12 (Une inégalité délicate ?)

Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \leq e^{t^2} + t.$$

Correction. Posons $f : t \mapsto e^{t^2} + t - e^t$ et montrons que f est positive.
On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2te^{t^2} + 1 - e^t \quad \text{et} \quad f''(t) = (4t^2+2)e^{t^2} - e^t.$$
Distinguons les cas.

- Si $t \notin [0,1]$, on a $f''(t) > 0$ (car $t^2 \geq t$ et donc $(4t^2+2)e^{t^2} \geq 2e^t > e^t$).
- Si $t \in [0,1]$, on écrit $f''(t) = e^{t^2}\left(4t^2 + 2 - e^{t-t^2}\right)$.
  Comme $t - t^2 \leq \dfrac{1}{4}$ pour $t \in [0,1]$, on a $e^{t-t^2} \leq e^{\frac{1}{4}} < 2$ et donc $f''(t) > 0$.

Dans tous les cas, $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) > 0$, donc la fonction f' croît sur $\mathbb{R}$.
Comme $f'(0) = 0$, la fonction f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction f est donc minimale en 0 et son minimum vaut $f(0) = 0$.
Ainsi :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \leq e^{t^2} + t}.$$

Autre stratégie. On peut aussi poser $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}+t}{e^t} = e^{t^2-t} + te^{-t}$, et montrer que h est supérieure à 1.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' : t \mapsto (2t-1)e^{t^2-t} + (1-t)e^{-t}$.
Comme $e^{-t} > 0$, le réel $h'(t)$ est du signe de $g(t) := (2t-1)e^{t^2} + (1-t)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : t \mapsto (4t^2 - 2t + 2)e^{t^2} - 1$.
Le minimum de $t \mapsto 4t^2 - 2t + 2$ vaut $\dfrac{7}{4}$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) \geq \dfrac{7}{4} - 1 > 0$.
Ainsi, la fonction g est croissante.
Comme $g(0) = 0$, la fonction g est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Il en est de même de h'.
Le minimum de h est obtenu en 0 et il vaut $h(0) = 1$, ce qui conclut.

Exercice 13 (Système d'équations logarithmiques)

Déterminer les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que
$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y &= \ln 2 \\ x - y &= 2. \end{cases}$$

Correction. On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $2\ln x - 3\ln y = \ln 2$ $(\dagger)$ et $x - y = 2$ $(\star)$.

En passant $(\dagger)$ à l'exponentielle, on obtient $\dfrac{x^2}{y^3} = 2$ ou, ce qui revient au même, $x^2 = 2y^3$ $(\ddagger)$.

L'équation $(\star)$ donne $x = 2 + y$, que l'on peut réinjecter dans $(\ddagger)$ pour obtenir (après développement)
$$2y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0. \qquad (\circledast)$$

Pour résoudre $(\circledast)$, on va étudier la fonction polynomiale
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 2y^3 - y^2 - 4y - 4. \end{array}$$

Cette fonction est polynomiale, donc dérivable. Sa dérivée est donnée par la formule

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(y) = 6y^2 - 2y - 4.$$

On trouve facilement les solutions de $f'(y) = 0$ (qui sont $-2/3$ et 1), et on vérifie aussi facilement que $f(-2/3) < 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		$-2/3$		1				$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations montre qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = 0$, et que cet élément vérifie $y > 1$. On vérifie alors que $f(2) = 0$.

Ainsi, $(\circledast)$ entraîne $y = 2$ et $(\star)$ entraîne à son tour $x = 4$.

Synthèse. Réciproquement, on a $2\ln 4 - 3\ln 2 = 4\ln 2 - 3\ln 2 = \ln 2$ et $4 - 2 = 2$, donc $(4, 2)$ est bien solution du système.

$\boxed{\text{Il n'y a qu'un seul couple } (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ solution du système, à savoir } (4, 2)}$.

Exercice 14 (Deux systèmes d'équations exponentielles)

Résoudre les systèmes suivants.

(i) $\begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} e^x\, e^{2y} &= a \\ 2xy &= 1 \end{cases}$ (a est un paramètre réel).

Correction.

(i) **Méthode 1.** Procédons par équivalences. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases} \iff \begin{cases} (2^3)^x &= 2 \times 5y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2^{3x} &= 2 \times 2^x \\ 2^x &= 5y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2^{2x} &= 2 \\ 2^x &= 5y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x &= 1 \\ y = &= \frac{2^x}{5} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{5}. \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions vaut $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}}$.

Méthode 2. Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $8^x = 10y$ et $2^x = 5y$.

Posons $\xi = 2^x$. On a alors $\xi^3 = 8^x = 10y = 2 \times (5y) = 2\xi$.

Donc $0 = \xi^3 - 2\xi = \xi(\xi^2 - 2) = \xi(\xi - \sqrt{2})(\xi + \sqrt{2})$, d'où $\xi \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$.

Comme $\xi = 2^x$, il s'agit d'un nombre strictement positif. On a donc $\xi = \sqrt{2}$.

Puisque $2^x = \sqrt{2} = 2^{1/2}$, on en déduit que $x = \frac{1}{2}$ (on peut par exemple appliquer $\log_2$), puis que $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Ainsi $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

Synthèse. Réciproquement, on vérifie que si $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$, alors

$$2^x = 5y = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad 8^x = 10y = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution est } x = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{\sqrt{2}}{5}}$.

(ii) Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e^{x+2y} = a$ et $2xy = 1$ ($\dagger$).

Distinguons deux cas.

- Si $a \leq 0$, l'égalité $e^{x+2y} = a$ est une contradiction, car l'exponentielle prend des valeurs strictement positives.
- Supposons donc $a > 0$. Les deux égalités ($\dagger$) entraînent $x + 2y = \ln a$ et $x \times 2y = 1$. Ainsi, les deux nombres réels x et $y' = 2y$ vérifient le système somme-produit

  $$\begin{cases} x + y' = \ln a \\ xy' = 1. \end{cases}$$

  On sait que les solutions de ce système proviennent des solutions de l'équation du second degré

  $$z^2 - (\ln a)z + 1 = 0. \tag{$\ddagger$}$$

  Puisque les réels x et y' sont solutions de ($\ddagger$), le discriminant de cette équation doit être positif, c'est-à-dire que l'on doit avoir $(\ln a)^2 \geq 4$, c'est-à-dire $|\ln a| \geq 2$, c'est-à-dire $a \geq e^2$ ou $a \leq e^{-2}$. Dans le cas contraire, on a une contradiction.

  Si la condition $(\ln a)^2 \geq 4$ est remplie, les solutions de ($\ddagger$) sont $\frac{\ln a \pm \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}$.

  On en déduit que

  $$(x,y) = \left(\frac{\ln a - \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}, \frac{\ln a + \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{4}\right)$$
  $$\text{ou} \quad (x,y) = \left(\frac{\ln a + \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}, \frac{\ln a - \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{4}\right).$$

Synthèse. Réciproquement, on vérifie que si $a > 0$ vérifie $(\ln a)^2 \geq 4$, les deux couples

$$\left(\frac{\ln a - \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}, \frac{\ln a + \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{4}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\ln a + \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}, \frac{\ln a - \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{4}\right)$$

vérifient le système d'équations initial.

Ainsi, les solutions du système forment l'ensemble

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{\ln a - \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}, \frac{\ln a + \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{4}\right), \left(\frac{\ln a + \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{2}, \frac{\ln a - \sqrt{(\ln a)^2 - 4}}{4}\right)\right\}}$$

$\boxed{\text{si } a \in \left]0, e^{-2}\right] \cup \left[e^2, +\infty\right[\text{ et } \mathscr{S} = \varnothing \text{ sinon}}$.

Fonctions trigonométriques circulaires

Exercice 15 (Des équations trigonométriques)

Résoudre les équations suivantes.

(i) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$

(ii) $\cos(4x) + \sin(4x) = 1$

(iii) $\sin x + \sin(3x) = 0$

(iv) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

(v) $3\cos x - 3\sin x = 6$

(vi) $2\sin x\, \cos x + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

(vii) $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$.

Correction.

(i) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 3\pi/4) = \sin((x + \pi/4)) + \pi/2) = \cos(x + \pi/4)$.
L'équation se réécrit par exemple $\cos(2x - \pi/3) = \cos(x + \pi/4)$. En utilisant le cas d'égalité des cosinus, on obtient que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{36}\ [2\pi/3],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left\{\theta + 2\pi k \;\middle|\; (\theta, k) \in \left\{\frac{\pi}{36}, \frac{7\pi}{12}, \frac{25\pi}{36}, \frac{49\pi}{36}\right\} \times \mathbb{Z}\right\}}.$$

(ii) On écrit le terme de gauche comme un cosinus déphasé : après calcul

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(4x) + \sin(4x) = \sqrt{2}\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Cela donne la forme équivalente $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$ à notre équation. En utilisant le cas d'égalité des cosinus, on obtient que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$x \equiv 0\ [\pi/2] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi/2],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left\{\theta + 2\pi k \;\middle|\; (\theta, k) \in \left\{0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{8}\right\} \times \mathbb{Z}\right\}}.$$

(iii) En faisant passer un terme de l'autre côté, notre équation est équivalente à $\sin(3x) = \sin(-x)$. En utilisant le cas d'égalité des sinus, on obtient que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$3x \equiv -x\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad 3x \equiv \pi + x\ [2\pi]$$

c'est-à-dire

$$x \equiv 0\ [\pi/2] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi],$$

c'est-à-dire

$$x \equiv 0\ [\pi/2],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left\{k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

(iv) On utilise la technique vue en cours pour calculer une somme de $\sin(kx)$. Après calcul, on obtient que si $x \not\equiv 0 : \ [2\pi]$ (pour pouvoir utiliser la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, ce cas étant de toute façon solution),

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\sin(2x)}{\sin x}.$$

Ainsi, l'équation de départ est équivalente à $\sin x = 0$ ou $\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right) = 0$ ou $\sin(2x) = 0$.

En utilisant le cas d'égalité des sinus, on obtient que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$x \equiv 0\ [\pi/2] \quad \text{ou} \quad x \equiv 0\ [2\pi/3],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left\{\theta + 2\pi k \;\middle|\; (\theta, k) \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\} \times \mathbb{Z}\right\}}.$$

(v) On écrit le terme de gauche comme un cosinus déphasé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3\cos x - 3\sin x = 3\sqrt{2}\cos(x + \phi),$$

pour une phase ϕ adéquate.

Comme $3\sqrt{2} < 6$, un tel cosinus déphasé ne peut jamais valoir 6, et l'équation n'a pas de solution.

(vi) En utilisant la formule du doublement du sinus, puis en écrivant la somme obtenue comme un cosinus déphasé, on voit que le terme de gauche de notre équation est $2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

En utilisant le cas d'égalité des cosinus, on obtient que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi/2],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

(vii) Notons $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin^3 x$. f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Réduisons l'étude à $[0, 2\pi]$. Remarque : f est également impaire.

On trouve comme dérivée, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

ce qui permet facilement de tracer le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

On obtient alors
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^3 x + \sin^3 x = 1 \iff \left(x \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)}.$$

Exercice 16 (Des inégalités trigonométriques)

Montrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|$

(ii) $\forall x \in [-1,1],\ |\arcsin x| \geq |x|$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1 - \cos x \leq \dfrac{x^2}{2}$

(iv) $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ |\tan x| \geq |x|$.

Correction.

(i) On peut, comme dans le cours de trigonométrie, utiliser un argument de concavité de sin sur $[0,\pi]$, étendre à $[-\pi, 0]$ par parité des fonctions concernées, et montrer la propriété sur $\mathbb{R} \setminus [-\pi,\pi]$ car sin est bornée par 1.
Sinon, l'étude de la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x - x \end{array}$$
montre que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin x \leq x. \qquad (\maltese)$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre alors l'inégalité de l'énoncé en distinguant les cas.

- Si $x \in [0,\pi]$, on a $|\sin x| = x$ et $|x| = |x|$, donc l'inégalité $(\maltese)$ montre que $|\sin x| \leq |x|$.
- Si $x \in [1,+\infty[$, on a clairement $|\sin x| \leq 1 \leq |x|$.
  Ces deux premiers points montrent l'inégalité voulue si $x \geq 0$.
- Si $x \leq 0$, on utilise les deux premiers points pour montrer
$$|\sin x| = |-\sin x| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|.$$

(ii) L'étude de la fonction
$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin x - x, \end{array}$$
dérivable sur $[0,1[$, montre que $\forall x \in [0,1[\,, \arcsin x \geq x$. On a par ailleurs $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2} \geq 1$, donc on peut étendre l'inégalité précédente à $[0,1]$.
Pour tout $x \in [0,1]$, on a alors $|\arcsin(x)| = \arcsin(x) \geq x = |x|$.

Pour $x \in [-1, 0]$, on a enfin

$$|\arcsin x| = |-\arcsin x| = |\arcsin(-x)| \geq |-x| = |x|$$

d'après ce qui précède.

(iii) La première inégalité est une simple reformulation de l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leq 1$.
Pour l'autre inégalité, on introduit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2} - (1 - \cos x) \end{array}.$$

Cette fonction étant paire, il suffit de montrer qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction f est clairement deux fois dérivable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = x - \sin x$ et $f''(x) = 1 - \cos x$.
La fonction f'' est donc positive, ce qui montre que f' est croissante. Comme $f'(0) = 0$, on en déduit que f' est positive, et donc que f est croissante. Comme $f(0) = 0$, cela montre l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, et conclut.

(iv) Comme dans les questions précédentes, on étudie la fonction (dérivable) $x \mapsto \tan x - x$ pour montrer l'inégalité sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, où tan est positive, et on conclut en exploitant l'imparité des fonctions.

Exercice 17 (Un calcul)

Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)\right)$.

Correction. La restriction de sin à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[-1, 1]$ est bijective de réciproque arcsin. $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] = \left[-\dfrac{6\pi}{12}, \dfrac{6\pi}{12}\right]$. Il faut donc se ramener à une valeur comprise entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ en utilisant les propriétés du sin. Comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on a :

$$\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{17\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right), \text{ avec } -\frac{5\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

donc

$$\boxed{\arcsin\left(\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right) = -\frac{5\pi}{12}}.$$

Exercice 18 (Des formules utiles)

1. Montrer $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.
2. Simplifier l'expression $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Correction.

1. Soit $x \in [-1,1]$. On a : $\cos(\pi - a) = -\cos a$ donc
$$\cos(\pi - \arccos(x)) = -\cos(\arccos(x)) = -x.$$
De plus, comme $\pi - \arccos(x) \in [0,\pi]$, en appliquant la fonctions arccos, il vient :
$$\boxed{\pi - \arccos(x) = \arccos(-x)}.$$
Remarque. En particulier, la fonction arccos n'est pas paire !

2. Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la composée $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$.
La restriction de f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$. f étant impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = -f(-x)$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}}$.
Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}}.$$

Exercice 19 (Des identités)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **Indication :** utiliser $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$.

   $\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$ donc $|\cos(\arctan x)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Comme $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on sait que $\cos(\arctan x) > 0$ et donc $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. (a) En déduire une expression simplifiée de $\sin(\arctan x)$.

   Méthode 1 : puisque $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :
$$\sin(\arctan x) = \tan(\arctan x) \times \cos(\arctan x) = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Méthode 2 : on a $\sin^2(\arctan x) = 1 - \cos^2(\arctan x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ donc $|\sin(\arctan x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$. Comme $\arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\arctan x)$ et x sont de même signe donc $\boxed{\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$.

En effet, si $x \geq 0$, alors $\arctan x \in [0, \pi/2]$ donc $\sin(\arctan x) \geq 0$ et si $x < 0$, alors $\arctan x \in [-\pi/2, 0[$ donc $\sin(\arctan x) < 0$.

(b) Montrer que $\cos(3\arctan x) = \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$.

$\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(3a) = T_3(\cos a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$ (Tchebychev).
Donc $\cos(3\arctan x) = 4\cos^3(\arctan x) - 3\cos(\arctan x) = \dfrac{4}{(1+x^2)^{3/2}} - \dfrac{3}{(1+x^2)^{1/2}}$ puis

$\boxed{\cos(3\arctan x) = \dfrac{4-3(1+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} = \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}}$.

(c) Montrer que $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan x\right) = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

$\forall a \in \mathbb{R},\ \cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ donc $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan x\right) = \dfrac{1+\cos(\arctan x)}{2} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 20 (Une égalité)

Montrer $2\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}} = \arcsin\dfrac{12}{13}$.

Correction.

- Montrons que ces deux réels appartiennent à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
  Tout d'abord, par définition de arcsin, on a $\arcsin\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
  De plus, puisque $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{18}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ et que la fonction arccos décroît sur $[0,1]$, on en déduit que

$$0 = \arccos 1 \leq \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \leq \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

  Donc $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, d'où $2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
  Pour obtenir l'égalité souhaitée, il suffit donc de montrer

$$\cos(2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}) = \cos(\arcsin\frac{12}{13}).$$

- D'une part, on a :

$$\cos(2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}) = 2\cos^2(\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}) - 1 = 2\times\frac{9}{13} - 1 = \frac{18-13}{13} = \frac{5}{13}.$$

- D'autre part, on a :

$$\cos^2(\arcsin\frac{12}{13}) = 1 - \sin^2(\arcsin\frac{12}{13}) = 1 - \frac{12^2}{13^2} = \frac{13^2 - 12^2}{13^2} = \frac{169-144}{13^2} = \frac{25}{13^2}.$$

  Donc $\cos(\arcsin\frac{12}{13}) = \pm\frac{5}{13}$. Mais $\arcsin\frac{12}{13} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\arcsin\frac{12}{13}) \geq 0$ d'où $\cos(\arcsin\frac{12}{13}) = \frac{5}{13}$.

- On a donc $\cos(2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}) = \cos(\arcsin\frac{12}{13})$.

  Puisque $\arccos\circ\cos = \mathrm{Id}_{|[0,\pi/2]}$, en appliquant arccos à l'égalité précédente, on conclut :

$$\boxed{2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}} = \arcsin\frac{12}{13}}.$$

Exercice 21 (Une égalité)

Déterminer son ensemble de validité et montrer

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arctan x.$$

Correction.

- **Définition.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ et $|x| \leq \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ donc $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ d'où $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in]-1,1[$. Puisque arcsin est définie sur $[-1,1]$ et arctan est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'équation est définie sur } \mathbb{R}}$.

- **Formule.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

  Méthode 1. Calculons le sin de chaque terme.

  D'une part, on a : $\sin\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

  D'autre part, on a :

$$\sin^2(\arctan x) = 1 - \cos^2(\arctan x) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

  donc

$$|\sin(\arctan x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{puis} \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

  car x et $\sin(\arctan x)$ sont de même signe. Ainsi,

$$\sin\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \sin(\arctan x).$$

  Or,

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

  et sin est injective sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, (ou bien sur cet intervalle, on a $\arcsin\circ\sin = \mathrm{Id}$), donc

$$\boxed{\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arctan x}.$$

Méthode 2. On applique tan.
Méthode 2bis. On pose $y = \arctan x$, de sorte que $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan y$. Le terme de gauche vaut donc $\arcsin \frac{\tan y}{\sqrt{\tan^2 y + 1}}$.
Or, $\sqrt{\tan^2 y + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{|\cos y|} = \frac{1}{\cos y}$, donc

$$\frac{\tan y}{\sqrt{\tan^2 y + 1}} = \tan y \cos y = \sin y,$$

d'où le terme de gauche vaut $\arcsin(\sin y) = y$ car $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, qui est aussi égal à $\arctan x$. Finalement, on a l'égalité souhaitée.
Méthode 3. On montre que la fonction $f : x \mapsto \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \arctan x$ est nulle sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle -calculs à faire-, donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc égale à $f(0) = 0$).

Exercice 22 (La fonction arctan ∘ tan)

Soit la fonction $f : x \mapsto \arctan(\tan(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

La fonction f est la composée des fonctions arctan et tan. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est définie sur l'ensemble de définition de tan *i.e.* sur

$$\boxed{\mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[}.$$

2. Tracer la courbe représentative de f, en justifiant votre construction.

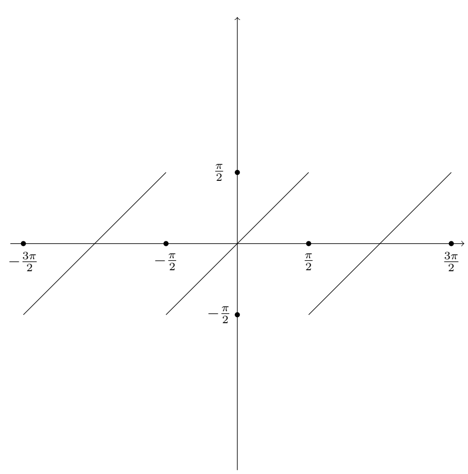
Puisque tan est π-périodique, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x + \pi \in \mathcal{D}$ et on a $\tan(x+\pi) = \tan(x)$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x+\pi) = \arctan(\tan(x+\pi)) = \arctan(\tan(x)) = f(x)$, ce qui signifie que $\underline{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur π, par exemple $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. La fonction arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tan sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Par conséquent, $\underline{\text{pour tout } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,\ f(x) = \arctan(\tan(x)) = x.}$

Ainsi, sur $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ la fonction f coïncide avec l'identité. Puisque f est π périodique, on finit le tracé par translation de π. On obtient la figure suivante.

3. Donner une expression simple de f sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Soit $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, alors $x - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Puisque f coïncide avec l'identité sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $f(x-\pi) = x - \pi$. De plus, comme f est π-périodique, on a

$$\underline{f(x)} = f(x - \pi + \pi) = f(x - \pi) = \underline{x - \pi}.$$



Exercice 23 (Une série télescopique)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\arctan(x+1) - \arctan x$.

   - On aimerait calculer la tangente de cette expression.
     Or, la fonction tan n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
   - Étudions la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(1+x) - \arctan x \end{array}$.
     La croissance de arctan montre que f est une fonction positive. Par ailleurs, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée
     $$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x-1}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)}.$$
     La fonction f' est donc strictement positive sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, puis strictement négative sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, ce qui démontre que le maximum de f est
     $$M = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\arctan\frac{1}{2}.$$
     Or, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\arctan\frac{1}{2} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, donc $M < \frac{\pi}{2}$.
     Ainsi,
     $$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(x+1) - \arctan x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[}.$$
   - Comme $\tan \circ \arctan = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, la formule d'addition de tan prouve que
     $$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan\left(\arctan(x+1) - \arctan x\right) = \frac{1+x-x}{1+(1+x)x} = \frac{1}{x^2+x+1}.$$
     En composant par arctan l'identité précédente, et sachant que $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan\tan(t) = t$, on en déduit le résultat voulu :
     $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de ce qui précède une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\arctan(k+1) - \arctan k\right) && \text{d'après la question 1.} \\ S_n &= \boxed{\arctan(n+1)} && \text{(télescopage).} \end{aligned}$$

3. Que dire de S_n quand $n \to +\infty$?

On a donc $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$, ce que l'on notera plus tard $\sum_{k=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 24 (Une simplification)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression $2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)+\arctan(x)$.

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)+\arctan(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} \times \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1\right) + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1+\underbrace{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}_{\text{développer}}} \times \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}} \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{1+x^2}-x)(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

f' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Or, $f(0) = 2\arctan 1 = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 25 (Une simplification)

Quand elle est bien définie, simplifier l'expression $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$.

Correction. Posons $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$.

- On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1-\cos x \geq 0$ et $1+\cos x \geq 0$ donc $f(x)$ est défini ssi $\cos x \neq -1$.
  Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[}$.
- De plus, f est 2π-périodique et paire donc il suffit de l'étudier sur $[0,\pi[$.
- Soit $x \in [0,\pi[$. On a :
  $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ et $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ donc $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\dfrac{x}{2}$ puis
  $$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \left|\tan\frac{x}{2}\right| = \tan\frac{x}{2},$$
  car $\dfrac{x}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Puisque $\dfrac{x}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient en appliquant arctan : $f(x) = \dfrac{x}{2}$.
  Ainsi, $\boxed{\forall x \in [0,\pi[,\ f(x) = \dfrac{x}{2}}$.
- Soit $x \in]-\pi, 0[$. Alors $-x \in]0,\pi[$, donc $f(x) = f(-x) = \dfrac{-x}{2}$.
- Finalement, $\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x) = \dfrac{|x|}{2}}$. Ailleurs, on utilise la 2π-périodicité de f pour se ramener à $]-\pi,\pi[$ et utiliser cette formule, comme dans l'exercice 22 : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$,

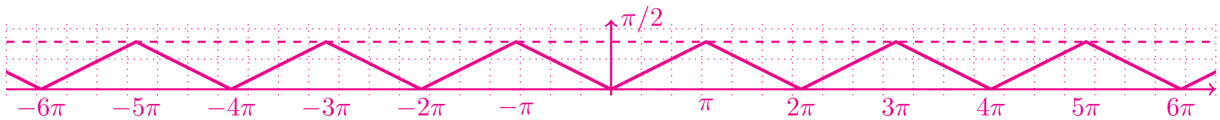
alors $x-2k\pi \in]-\pi,\pi[$, donc
$$\boxed{f(x)=f(x-2k\pi)=\frac{|x-2k\pi|}{2}}.$$

Exercice 26 (Encore une identité trigonométrique)

Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier $\arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$.

Correction. La fonction $f : x\mapsto \arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\underbrace{]k\pi,(k+1)\pi[}_{I_k}$ et on obtient par un calcul soigneux
$$\forall x\in D,\ f'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\sin x).$$

Cela permet de montrer que f est la fonction affine par morceaux dont le graphe est



En effet, notons ϕ cette fonction. Il est clair qu'elle est dérivable sur D, et que sa dérivée coïncide avec celle de f sur D. Ainsi, sur chaque intervalle I_k, l'écart entre f et ϕ est une constante.

Il suffit alors de noter

- que quel que soit $k\in\mathbb{Z}$, $f\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\phi\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$
- et que quel que soit $k\in Z$, $f(k\pi)=\phi(k\pi)=\begin{cases}0 & \text{si } k\equiv 0\ [2]\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k\equiv 1\ [2]\end{cases}$

pour en déduire $f=\phi$.

Exercice 27 (Des équations trigonométriques inverses)

Résoudre les équations

(i) $\arcsin(2\,x)=\arccos(x)$ ☑

(ii) $\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=2\arctan x$ ♡

(iii) $\arcsin x+\arcsin(\sqrt{1-x^2})=\dfrac{\pi}{2}$

(iv) $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Correction.

(i) Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1,1]$ donc l'équation est définie sur $[-1/2,1/2]$.

On introduit $f : x\mapsto \arcsin(2\,x)-\arccos(x)$. La fonction f est définie et continue sur $[-1/2,1/2]$, $f(0)=0-\dfrac{\pi}{2}$ et $f(1/2)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ et $0\in[f(0),f(1/2)]$ donc d'après le TVI, f s'annule au moins une fois, donc l'équation admet au moins une solution dans $[0,1/2]$. Donc $S\neq\varnothing$.

Soit $x\in[0,1/2]$ solution de l'équation. En appliquant $\sin^2$, on obtient : $4x^2=1-x^2$ donc $5x^2=1$ d'où $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Mais, $x\geq 0$ donc $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $S\subset\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

Puisque $S \subset \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$ et $S \neq \varnothing$, on en déduit que $\boxed{S = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}}$.

(ii) Première chose à déterminer : l'ensemble de définition de l'équation.

Une petite étude de fonction montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fraction $\frac{2x}{1+x^2}$ est à valeurs dans $[-1, 1]$.

Donc l'ensemble de définition de l'équation est $\mathbb{R}$.

Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2\arctan x$.

Par définition de la fonction arcsin, on a

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

d'où

$$2\arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

puis

$$\arctan x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

puis $x \in [-1, 1]$.

Synthèse.

Soit $x \in [-1, 1]$.

Montrons que $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2\arctan x$.

Partons du membre gauche, mais avant remarquons que x peut s'écrire $\tan t$.

En effet, on a $x \in [-1, 1]$. Comme la fonction tan induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[-1, 1]$, il existe un (unique) $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $x = \tan t$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right) &= \arcsin\left(\frac{2\,\tan t}{1+\tan^2 t}\right) \\
&= \arcsin(\sin(2t)) && \text{il faut se rappeler de cette formule de l'angle moitié} \\
&= 2t && \text{car } 2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= 2\arctan x.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble solution de l'équation est donc le segment } [-1, 1]}$.

(iii) **Ensemble de définition de l'équation.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$\arcsin(\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} \iff \sqrt{1-x^2} \text{ existe et appartient à } [-1, 1] \iff x \in [-1, 1].$$

Donc l'ensemble de définition de l'équation est $[-1, 1]$.

La clé. On a :

$$\underbrace{\arcsin(\sqrt{1-x^2})}_{\in[0, \frac{\pi}{2}]} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}_{\in[0, \pi]}$$

Analyse. Soit $x \in [-1,1]$ tel que $\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\arcsin(\sqrt{1-x^2}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

D'où $-\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

D'où $\arcsin x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

D'où $x \in [0,1]$.

Synthèse. Soit $x \in [0,1]$.

Montrons que

$$\arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Examinons les sinus des deux membres.

- On a $\sin\left(\arcsin(\sqrt{1-x^2})\right) = \sqrt{1-x^2}$.
- On a $\sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (la dernière égalité doit pouvoir être reprouvée, nous l'avons vue en classe).

Les sinus des deux membres sont égaux.

Or les deux membres appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (why ?).

Par injectivité de la fonction sinus restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a l'égalité.

Où a-t-on utilisé l'hypothèse $x \in [0,1]$?

Exercice 28 (Une équation) ♡

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Correction. arcsin est définie sur $[-1,1]$ donc l'équation n'a de sens que pour x tel que

$$|2x| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad |x\sqrt{3}| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad |x| \leq 1.$$

Or, $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ donc l'équation n'a de sens que pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

- **Analyse.** Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ solution de l'équation.

  En composant par sin et en utilisant

  $$\begin{aligned} &\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - s \in b \cos a \\ &\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin y) = y \\ &\forall y \in [-1,1],\ \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1-y^2}, \end{aligned}$$

  il vient

  $$2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = x.$$

  En factorisant par x, on obtient : $x(2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3(1-4x^2)} - 1) = 0$ donc

  $$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3(1-4x^2)} - 1 = 0.$$

  Supposons maintenant que $x \neq 0$. Alors $2\sqrt{1-3x^2} = 1 + \sqrt{3(1-4x^2)}$.
  (Si on garde les deux racines carrées à gauche, il faudra élever deux fois au carré).

En élevant au carré et en simplifiant, il reste $2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 0$ d'où $4x^2 = 1$ d'où $x = \pm\dfrac{1}{2}$.
Finalement, $\underline{x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}}$, d'où $\underline{\mathscr{S} \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}}$.

- **Synthèse.** Réciproquement, $\arcsin(0) = 0$ donc <u>0 est solution</u>.
  $\arcsin(1) - \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc <u>$\frac{1}{2}$ est solution</u>.
  Comme arcsin est impaire, <u>$-\frac{1}{2}$ aussi est solution</u>.
  Ainsi, $\underline{\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \subset \mathscr{S}}$.

Finalement,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}}.$$

Exercice 29 (Une équation)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

- arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Notons (E) l'équation à résoudre et $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble de ses solutions.
  - Prouvons que l'équation possède une unique solution. La fonction :

    $$f : x \mapsto \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1)$$

    est continue et strictement croissante (somme de trois fonctions croissantes dont l'une est strictement croissante) et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[= \left]\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

    L'équation donnée possède donc une unique solution.
    Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la solution est strictement positive.
  - Déterminons cette solution.
    Soit $x \in \mathbb{R}$ telle que

    $$\arctan(x-1) + \arctan(x+1) \;=\; \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

    On veut appliquer la fonction tangente.
    Pour cela, justifions que les deux réels sont dans $\mathcal{D}_{\tan}$.
    On a

    $$\frac{\pi}{2} - \arctan x \;\in\;]0, \pi[$$

    De plus, $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x \neq \dfrac{\pi}{2}$.

    Raisonnons par l'absurde. Si on avait $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, *on aurait alors* $\arctan(x) = 0$, *d'où* $x = 0$.
    Mais 0 *ne vérifie pas l'égalité initiale.*

    On a donc montré que

    $$\frac{\pi}{2} - \arctan x \in \mathcal{D}_{\tan}$$

    On peut appliquer la fonction tangente à chacun des membres, ce qui donne :

    $$\tan\big(\arctan(x-1) + \arctan(x+1)\big) \;=\; \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

    À gauche, on utilise la formule $\tan(a+b)$ et à droite on utilise $\tan(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

On obtient l'égalité
$$\frac{2\,x}{2-x^2}=\frac{1}{x}$$
D'où $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Comme la racine cherchée est positive, on en déduit que $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$; il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a prouvé que l'équation donnée possède une unique solution.

Bilan : l'ensemble des solutions est $\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$.

Exercice 30 (La formule de Machin)

1. Montrer que : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ puis établir que $0<\arctan\frac{1}{5}<\frac{\pi}{8}$.

 - Déjà fait dans le cours n°2. Notons $t=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On a : $1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2t}{1-t^2}$ donc $t^2+2t-1=0$ *i.e.* $(t+1)^2-2=0$, d'où $t=-1\pm\sqrt{2}$. Or, $\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $t>0$ puis $\boxed{t=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1}$.
 - On a $0<\frac{1}{5}<\sqrt{2}-1$ et arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $0<\arctan\frac{1}{5}<\arctan(\sqrt{2}-1)$. Or, $\arctan(\sqrt{2}-1)=\arctan\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{8}$, car $\frac{\pi}{8}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\boxed{0<\arctan\frac{1}{5}<\frac{\pi}{8}}$.

2. Montrer que : $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right[$, $\tan(4x)=\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-4t^2}$ où $t=\tan(x)$.

Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right[$. Alors $4x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan(4x)$ est bien définie et t aussi.
On a : $\tan(4x)=\frac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)}$. Or, $\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}=\frac{2t}{1-t^2}$.
Donc, $\tan(4x)=\dfrac{\frac{4t}{1-t^2}}{1-\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}=\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-4t^2}$.

3. Montrer que : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

D'après la question 1., $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ donc sont non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et on peut appliquer la formule $\tan(a-b)$ sachant que $\tan(\pi/4)=1$.
Avant cela, calculons $\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)$.
Puisque $4\arctan\frac{1}{5}\in\in\left]-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right[$, on a d'après la question 2.,
$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)=\frac{4\times\frac{1}{5}\times\frac{24}{25}}{\left(\frac{24}{25}\right)^2-\frac{4}{25}}=\frac{\frac{4\times5}{25}\times\frac{24}{25}}{\left(\frac{24}{25}\right)^2-\frac{4}{25}}=\frac{20\times24}{24^2-4\times25}=\frac{20\times6}{24\times6-25}=\frac{120}{119}.$$

Ainsi,

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}==\frac{120-119}{119+120}=\frac{1}{239}.$$

En appliquant arctan et sachant que $\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\subset\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\boxed{4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1}{239}\right)}.$$

Remarque. Cette formule fut démontrée par le mathématicien anglais John Machin en 1706, et lui permit de devenir le premier homme de l'histoire à calculer les 100 premières décimales du nombre π grâce à $\boxed{\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}}$, et le développement en séries entières de arctan.

Exercice 31 (Une étude de fonction)

Étudier la fonction $f : x\mapsto x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

Correction.

- Notons $D:=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.
- $\forall x\in D,\ f'(x)=2x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x^2}{(1+x)^2+1}=xg(x)$ où

$$g : x\mapsto 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)-\frac{x}{(1+x)^2+1},$$

  est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (le but est d'isoler l'arctan pour le faire disparaitre en dérivant donc on met x en facteur). Ainsi,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{-2}{(1+x)^2+1}-\frac{(1+x)^2+1-2x(x+1)}{((1+x)^2+1)^2}\\&=-\frac{2((1+x)^2+1)+(1+x)^2+1-2x(1+x)}{((1+x)^2+1)^2}\\&=-\frac{x^2+4x+6}{2(1+(1+x)^2)^2}<0,\end{aligned}$$

  car la fonction polynômiale au numérateur n'a pas de racine donc est de signe fixe.
- Tableau de variations : $f'(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in]-1,0]$. Ainsi, f est croissante sur l'intervalle $]-\infty,-1[$ et sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et f est décroissante sur l'intervalle $]-1,0[$.
- Limites : $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{y\to-\infty}\arctan y=-\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\arctan y=+\frac{\pi}{2}$.

  Rappelons que $\lim\limits_{u\to0}\frac{\arctan u}{u}=1$ (T.A.) donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\arctan\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}}=1$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $f(0)=0$.
- Il n'y a pas d'asymptote horizontale ni verticale mais il peut y avoir des asymptotes obliques en $\pm\infty$.

- Étude au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = x \arctan \frac{1}{1+x} = \frac{\arctan \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} \times \frac{x}{1+x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1 \times 1 = 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ donc $\mathscr{C}_f$ peut admettre une asymptote oblique en $\pm\infty$ de coefficient directeur 1. Dans ce cas, l'ordonnée à l'origine $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, mais on ne peut pas le déterminer sans DL...

Posons $u = \dfrac{1}{x}$. $f(x) = \dfrac{1}{u^2} \arctan\left(\dfrac{u}{1+u}\right)$.

Prévision des ordres : ordre 3 pour avoir de l'ordre 1.

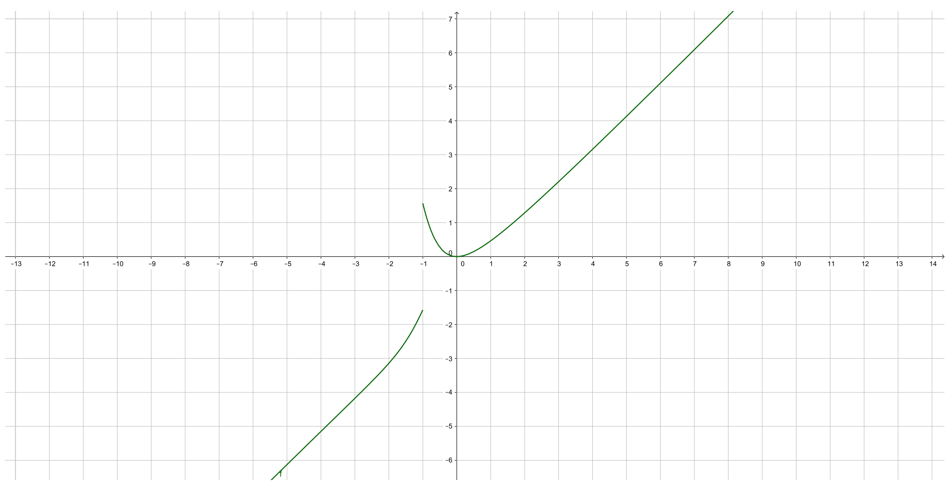
Or, $\dfrac{u}{1+u} = u\dfrac{1}{1+u} = u(1 - u + u^2 + o(u^2)) = u - u^2 + u^3 + o(u^3)$.

De plus, posons $v = \dfrac{u}{1+u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ et $\arctan v = v - \dfrac{v^3}{3} + \underset{0}{o}(v^3)$.

Après calculs, $\underline{f(x) = \dfrac{1}{u} - 1 + \dfrac{2}{3}u + o(u) = x - 1 + \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

Ainsi, $f(x) - (x-1) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{2}{3x} \to 0$. Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x - 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de l'infini}}$.

De plus, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de son asymptote en } -\infty \text{ et au dessus en } +\infty}$. Faire un dessin local.



Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 32 (Formules d'addition des fonctions hyperboliques)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les formules suivantes :

(i) $\text{sh}(x+y) = \text{sh}x\text{ch}y + \text{ch}x\text{sh}y$

(ii) $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}x\text{ch}x$

(iii) $\text{ch}(x+y) = \text{ch}x\text{ch}y + \text{sh}x\text{sh}y$

(iv) $\text{ch}(2x) = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x$

Correction.

(i) On a

$$\begin{aligned}
\text{ch}x\,\text{sh}y + \text{sh}x\,\text{ch}y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}\right) + \left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}\right)\right] \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\
&= \text{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

(ii) On applique la formule précédente à $y = x$.

(iii) On a

$$\begin{aligned}
\text{ch}x\,\text{ch}y + \text{sh}x\,\text{sh}y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}\right) + \left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}\right)\right] \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\
&= \text{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

(iv) On applique la formule précédente à $y = x$.

Exercice 33 (Une espèce de formule de Moivre)

Rappeler la formule de Moivre chez les nombres complexes. Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{ch}x + \text{sh}x)^p = \text{ch}(px) + \text{sh}(px).$$

Correction. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(\text{ch}x + \text{sh}x)^p &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^p \\
&= (e^x)^p \\
&= e^{px} \\
\text{et} \quad \text{ch}(px) + \text{sh}(px) &= \frac{e^{px} + e^{-px}}{2} + \frac{e^{px} - e^{-px}}{2} \\
&= e^{px}.
\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Exercice 34 (Un calcul)

Justifier que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note argsh sa bijection réciproque. Calculer $\text{argsh}\frac{3}{4}$.

Correction. Méthode 1.

- sh est strictement croissante (c'est du cours, et se justifie car $\text{sh}' = \text{ch} > 0$) et continue donc d'après le TBM, sh induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} \text{sh}, \lim_{-\infty} \text{sh}\right[=]-\infty + \infty[= \mathbb{R}$, donc $\boxed{\text{sh est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.
- Posons $x = \text{argsh}\frac{3}{4}$. On a donc $\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{3}{4}$. Donc en multipliant par e^x, il vient :

$$e^{2x} - \frac{3}{2}e^x - 1 = 0,$$

donc e^x est une racine du polynôme $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ dont les racines sont 2 et $-1/2$. Puisque $e^x > 0$, la seule possibilité est que $e^x = 2$, donc $x = \ln 2$. On a donc montré

$$\boxed{\text{argsh}\frac{3}{4} = \ln 2}.$$

Méthode 2. On montre que sh est bijective et on détermine sh^{-1} par équivalences.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
y = \text{sh}x &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&\iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\
&\iff e^x \text{ est racine du polynôme } X^2 - 2yX + 1 \\
&\qquad\qquad (\text{de discriminant } 4(y^2+1) \text{ et de racines } y \pm \sqrt{1+y^2}) \\
&\iff e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Or, $1 + y^2 > y^2$ donc $\sqrt{1+y^2} > |y| \geq y$ donc $y - \sqrt{1+y^2} < 0$, et $e^x > 0$ donc

$$y = \text{sh}x \iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Ceci prouve que tout réel y possède un unique antécédent par sh (qui est $\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$) donc $\boxed{\text{sh est bijective}}$ et

$$\boxed{\text{argsh} = \text{sh}^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \end{array}}.$$

N.B. argsh est une composée de fonctions usuelles.
En particulier,

$$\boxed{\text{argsh}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}}\right) = \ln\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}}\right) = \ln\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) = \ln 2}.$$

Exercice 35 (La bijection réciproque de sh)

On considère les fonctions

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \quad et \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}.$$

Montrer que g est bien définie. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On a : $x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} > |x|$ d'où $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x|$.
  Or, $|x| \geq -x$ donc $x + |x| \geq 0$. Par transitivité, on obtient $x + \sqrt{x^2+1} > 0$, cela pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
- $(g \circ f)(x) = \ln\left(f(x) + \sqrt{f(x)^2+1}\right)$. Or, $f = \text{sh}$ donc $f(x)^2 + 1 = \text{ch}^2(x)$ et puisque $\text{ch}x \geq 0$, on a $\sqrt{f(x)^2+1} = \text{ch}x$. Donc $f(x) + \sqrt{f(x)^2+1} = \text{sh}x + \text{ch}x = e^x$. Ainsi, $(g \circ f)(x) = \ln(e^x) = x$, cela pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}}$.
- $(f \circ g)(x) = \dfrac{e^{g(x)} + e^{-g(x)}}{2}$. Or, $e^{g(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$ donc

$$\begin{aligned} e^{g(x)} - e^{-g(x)} &= x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= 2x. \end{aligned}$$

  D'où $(f \circ g)(x) = x$, cela pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}}$.
- On en déduit que f est bijective et $f^{-1} = g$ *i.e.*

$$\boxed{\text{sh est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}} \text{ et } \boxed{\text{sh}^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{array}}.$$

Exercice 36 (Une identité hyperbolique)

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(\text{sh}x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\text{ch}x}\right)$.

Soient $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(\text{sh}x) \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\text{ch}x}\right) \end{array}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{\text{ch}x}{1 + \text{sh}^2 x} = \dfrac{1}{\text{ch}x}$.

La fonction g est dérivable sur $\underline{\mathbb{R}_+^*}$ (à cause de arccos qui n'est dérivable que sur $]-1, 1[$), de dérivée $x \mapsto -\dfrac{-\frac{\text{sh}x}{\text{ch}^2 x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{ch}x}\right)^2}} = \dfrac{1}{\text{ch}x}$.

Cela démontre que la fonction $f - g$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Pour montrer que f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$, nous allons montrer que la constante vaut 0, en vérifiant que f et g convergent vers la même limite en $+\infty$. On a

$$\begin{array}{llll} & \mathrm{sh}x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{donc} & f(x) = \arctan(\mathrm{sh}x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2} \\ \text{et} & \mathrm{ch}x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{donc} & \dfrac{1}{\mathrm{ch}x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ & & \text{puis} & g(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}, \end{array}$$

la dernière déduction étant une conséquence de la continuité de arccos. f et g sont donc égales sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, un calcul direct montre que $f(0) = g(0) = 0$ donc finalement, les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 37 (Sommes)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx + y) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx + y).$$

Correction. Par définition de ch et sh, on a

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx + y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y}$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx + y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y}.$$

- $\boxed{\text{Si } x = 0, \text{ alors } C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx + y) = (n+1)\mathrm{ch}y \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx + y) = (n+1)\mathrm{sh}y}$.
- Désormais, on suppose $x \neq 0$, d'où $e^x \neq 1$ (ce qui rend licite les calculs ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} &= e^y \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \\ &= e^y \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} \\ &= e^y e^{\frac{nx}{2}} \frac{-2\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{-2\mathrm{sh}\frac{x}{2}} \\ &= e^{\frac{nx}{2}+y} \frac{\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} = e^{\frac{nx}{2}+y} \frac{\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}}}.$$

En appliquant ce résultat au couple $(-x, -y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a immédiatement :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y} = e^{-\frac{nx}{2}-y} \frac{\mathrm{sh}\frac{-(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{-x}{2}} = e^{-\frac{nx}{2}-y} \frac{\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}},$$

car sh est impaire. Donc

$$C_n = \frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\,\frac{e^{\frac{nx}{2}+y}+e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2} = \boxed{\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}+y\right)}$$

et de même

$$S_n = \frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\,\frac{e^{\frac{nx}{2}+y}-e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2} = \boxed{\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}+y\right)}.$$

Autre présentation (la preuve est la même). On peut aussi avantageusement calculer sans trop d'effort les deux sommes en même temps, en considérant la somme et la différence des deux sommes. D'après un calcul précédent, on a :

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} = e^{\frac{nx}{2}+y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

et

$$C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y} = e^{\frac{-nx}{2}-y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

Par somme et différence, on récupère donc

$$\boxed{C_n = \frac{e^{\frac{nx}{2}+y}+e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}+y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}}$$

et

$$\boxed{S_n = \frac{e^{\frac{nx}{2}+y}-e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}+y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}}.$$