Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1. *Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Correction. *Soit $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $r = \|a\| > 0$.*
On a : $(0,0) \notin B(a,r)$ (boule ouverte) car $\|a - 0_{\mathbb{R}^2}\| = r$. Cela montre que $B(a,r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$.

Exercice 2.

1. *Soit I un ensemble quelconque et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que leur union $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \frac{1}{n}\right\}$.*
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ n'en est pas un.

Correction.

1. *Soit $a \in \bigcup_{i\in I} U_i$. On peut donc trouver $i_0 \in I$ tel que $a \in U_{i_0}$.*
   Comme U_{i_0} est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U_{i_0}$.
   A fortiori, on a donc $B(a,r) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, ce qui conclut.
2. *Soit $a \in U \cap V$. On a donc $a \in U$ et $a \in V$.*
   Comme U est ouvert, on peut trouver $r' > 0$ tel que $B(a,r') \subset U$. De même, on peut trouver $r'' > 0$ tel que $B(a,r'') \subset V$.
   Posons $r = \min(r', r'') > 0$. On a donc les inclusions $B(a,r) \subset B(a,r') \subset U$ et, de même, $B(a,r) \subset B(a,r'') \subset V$, donc $B(a,r) \subset U \cap V$, ce qui conclut.
3. • *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :*
   $$U_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > -\frac{1}{n}\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < \frac{1}{n}\right\}.$$
   On peut montrer (comme dans un exemple du cours) que les demi-plans :
   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > -\frac{1}{n}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < \frac{1}{n}\right\}$$
   sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
   D'après la question précédente, il en va de même de leur intersection, donc $\boxed{U_n \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$.
   • *Par double inclusion, on montre que $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}}$. Or, on peut montrer (cf application du cours) que la droite $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ainsi,*

$$\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \text{ n'est pas ouvert}}.$$

Dérivées partielles et gradient

Exercice 3. *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.*

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x}{y} \end{array}$;
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{xy^2} \end{array}$;
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\ln(xy) \end{array}$;
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & e^{-x}\sin(x^2+y^2). \end{array}$

Correction. *On trouve :*

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)=\frac{1}{b}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)=\frac{-a}{b^2}}.$$

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,\ \boxed{\frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)=\frac{-1}{a^2b^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)=\frac{-2}{ab^3}}.$$

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,\ \boxed{\frac{\partial f_3}{\partial x}(a,b)=\ln(ab)+1} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_3}{\partial y}(a,b)=\frac{a}{b}}.$$

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R},\ \boxed{\frac{\partial f_4}{\partial x}(a,b)=e^{-a}\left[2a\cos(a^2+b^2)-\sin(a^2+b^2)\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_4}{\partial y}(a,b)=2be^{-a}\cos(a^2+b^2)}.$$

Exercice 4. *On note N la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire* $N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2}. \end{array}$

1. *N est-elle continue ?*
2. *Montrer que N est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.*
3. *N admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?*

Correction.

1. *La fonction $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc par composée,* $\boxed{N \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2}$.
2. *La fonction $N^2 : (x,y)\mapsto x^2+y^2$ est polynomiale donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composée,*

$$\boxed{N \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}.$$

De plus, après la Proposition 3.12 donnant les dérivées partielles d'une composée d'une fonction de deux variables par une fonction d'une variable, on a pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial N}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{\partial N^2}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} \times 2a = \boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}},$$

et par symétrie,

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial y}(a,b) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

3. *La première application partielle en $(0,0)$ de N est $N_1 : x \mapsto N(x,0) = |x|$ et cette dernière n'est pas dérivable en 0, la fonction $\boxed{\text{N n'admet pas de première dérivée partielle en 0}}$.*
   Il en va $\boxed{\text{de même pour la deuxième dérivée partielle}}$.

Exercice 5. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.*
Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t^2,t^3)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Correction. *Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto t^3$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto (t^2,t^3)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, donc d'après la première règle de la chaîne, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\boxed{g'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3)}.$$

Exercice 6. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.*
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ et, suivant le cas, calculer leur dérivée ou leurs dérivées partielles en fonction des dérivées partielles de f.

1. $u_1 : (x,y) \mapsto f(y,x)$;
2. $u_2 : x \mapsto f(x,x)$;
3. $u_3 : (x,y) \mapsto f(y,f(x,x))$;
4. $u_4 : x \mapsto f(x,f(x,x))$.

Correction.

1. *$u_1 = f \circ \Phi$ où $\Phi = (\phi,\psi) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$ avec $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$ la deuxième projection et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$ la première projection.*
   Puisque ϕ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $\Phi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, on sait d'après la deuxième règle de la chaîne que $\boxed{u_1 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b)}_{=1} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(b,a)},$$

et

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b)}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b)}_{=0} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(b,a)}.$$

2. *$u_2 = f \circ \gamma$ où $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,t) \end{array}$ avec $\gamma_1 = \gamma_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.*
Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on sait d'après la première règle de la chaîne que $\boxed{u_2 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$u_2'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) \times \underbrace{\gamma_1(t_0)}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) \times \underbrace{\gamma_2(t_0)}_{=1} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(t_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0,t_0)}.$$

3. *$u_3 : (x,y) \mapsto f(y, u_2(x))$ donc on peut écrire $u_3 = f \circ \Phi$ où $\Phi = (\phi, \psi) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, f(x,x)) \end{array}$*
avec $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$ la deuxième projection et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & u_2(x) \end{array}$.
Puisque ϕ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $\Phi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on sait d'après la deuxième règle de la chaîne que $\boxed{u_3 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a,b)) \times \frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b).$$

Or, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(a,b) = u_2'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,a)$, donc

$$\boxed{\frac{\partial u_3}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(b, f(a,a)) \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,a)\right)}.$$

De même, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u_3}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b)}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(a,b)) \times \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b)}_{=0} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(b, f(a,a))}.$$

4. *$u_4 : x \mapsto f(x, u_2(x))$ donc on peut écrire $u_4 = f \circ \gamma$ où $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, u_2(t)) \end{array}$ avec $\gamma_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\gamma_2 = u_2$.*
Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et u_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on sait d'après la première

règle de la chaîne que $\boxed{u_4 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ *et pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} u_4'(t_0) = (f\circ\gamma)'(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) \times \underbrace{\gamma_1(t_0)}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) \times \underbrace{\gamma_2(t_0)}_{=u_2'(t_0)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, f(t_0,t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, f(t_0,t_0)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0,t_0)\right). \end{aligned}$$

Exercice 7. *Soit* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & si\ x \neq 0 \\ y & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}.$

1. *Montrer que* f *n'est pas continue en* $(0,0)$.
2. *Montrer que* f *est dérivable en* $(0,0)$ *selon toutes directions.*

Correction.

1. $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t^2,t) = 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \neq 0 = f(0,0)$ *donc* $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } (0,0)}$.
   Pour justifier la non continuité de f *en* $(0,0)$ *:*
   $$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists z \in \mathbb{R}^2,\ \|z - 0_{\mathbb{R}^2}\| \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(z) - f(0_{\mathbb{R}^2})| > \varepsilon.$$
   Ici $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ *convient car pour tout* $\delta > 0$ *en posant* $t = \min\left(1, \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}\right)$ *et* $z = (t^2,t)$, *alors*
   $$\|z\| = \sqrt{t^4+t^2} \leq |t|\sqrt{t^2+1} \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \delta \quad \text{et} \quad |f(z) - f(0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

2. *Soit* $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$. *Montrons que* f *est dérivable en* $0_{\mathbb{R}^2}$ *selon* v.
   Considérons $\varphi_{0,v} : t \mapsto f(0_{\mathbb{R}^2} + tv) = f(tv) = f(th,tk)$.
   On sait que f *est dérivable en* $0_{\mathbb{R}^2}$ *selon* v *ssi* $\varphi_{0,v}$ *est dérivable en 0. On a :*
   $$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\varphi_{0,v}(t) - \varphi_{0,v}(0)}{t} = \frac{f(th,tk)}{t} = \begin{cases} \dfrac{k^2}{h} & si\ h \neq 0 \\ k & si\ h = 0 \end{cases}.$$
   Dans tous les cas, $\varphi_{0,v}$ *est dérivable en* 0 *et* $D_v f(0) = \varphi_{0,v}'(0) = \begin{cases} \dfrac{k^2}{h} & si\ h \neq 0 \\ k & si\ h = 0 \end{cases}$, *ce qui prouve que* $\boxed{f \text{ est dérivable en } (0,0) \text{ selon tout vecteur}}$.

Exercice 8. 1. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\nabla f = 0$. Montrer que f est constante.*

2. *Donner un exemple d'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de fonction $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ non constante telle que $\nabla f = 0$.*

Correction.

1. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On va montrer $f(\alpha, \beta) = f(0,0)$, ce qui conclura.*
   Méthode 1. *Puisque $(\partial_1 f, \partial_2 f) = \nabla f = 0$, on sait que les dérivées partielles de f sont nulles en tout point, donc que les applications partielles en tout point sont constantes.*
   Considérons
   $$f_2 : y \mapsto f(\alpha, y) \qquad \text{et} \qquad f_1 : x \mapsto f(x, 0)$$
   (resp. la seconde application partielle de f en (α, β) et la première application partielle de f en $(0,0)$).
   Comme f_1 et f_2 sont constantes sur $\mathbb{R}$, on a :
   $$f(\alpha, \beta) = f_2(\beta) = f_2(0) = f(\alpha, 0) = f_1(\alpha) = f_1(0) = f(0,0),$$
   d'où $\boxed{f \text{ est constante}}$.
   Méthode 2. *On rappelle que $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$, et qu'il est nul par hypothèse, pour tout $a, v \in \mathbb{R}^2$. On considère $\varphi : t \mapsto f((0,0) + t(\alpha, \beta)) = f(t\alpha, t\beta)$. D'après la première règle de la chaîne, la fonction $\varphi : t \mapsto f(t\,\alpha, t\,\beta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :*
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t\,\alpha, t\,\beta)\,\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(t\,\alpha, t\,\beta)\,\beta = 0,$$
   ce qui montre que φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   En particulier, $\varphi(1) = \varphi(0)$, d'où $f(\alpha, \beta) = f(0,0)$, d'où $\boxed{f \text{ est constante}}$.

2. *Soient $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et* $f : \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array}$.

   - *Vérifions que $\boxed{U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$.*
     Soit $a = (\alpha, \beta) \in U$. Alors $\alpha \neq 0$, donc $|\alpha| > 0$.
     Montrons que $B(a, |\alpha|) \subset U$.
     Soit $z = (x, y) \in B(a, |\alpha|)$.
     Alors $\|z - a\| < |\alpha|$, c'est-à-dire $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} < |\alpha|$. Comme par inégalité triangulaire, $-(|x| - |\alpha|) \leq |x - \alpha| \leq \|z - a\|$, on a par transitivité $|\alpha| - |x| < |\alpha|$, donc $|x| > 0$, d'où $x \neq 0$.
     Ainsi, $z \in U$.
   - *Il est clair que la fonction $\boxed{f \text{ n'est pas constante}}$.*
   - *Pourtant, quel que soit $a \in U$, la fonction f est constante sur un disque centré en a (c'est-à-dire au voisinage de a), ce qui montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\nabla f(a) = 0}$.*

Exercice 9. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Montrer que f *vérifie* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *si et seulement si l'on peut trouver* $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = h(x).$$

Correction.

Sens réciproque. *Supposons qu'il existe* $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que* $f : (x,y) \mapsto h(x)$.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *Alors la deuxième application partielle de* f *en* (α, β) *est la fonction constante* $f_2 : t \mapsto f(\alpha, t) = h(\alpha)$ *donc* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = f_2'(\beta) = 0$, *cela pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *donc* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0}$.

Sens direct. *Supposons maintenant* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *Considérons* $f_2 : t \mapsto f(\alpha, t)$ *la deuxième application partielle de* f *en* (α, β). *On sait que* $f_2'(\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0$, *cela pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$, *ce qui prouve que* f_2 *est constante sur* $\mathbb{R}$.
Ainsi : $f(\alpha, \beta) = f_2(\beta) = f_2(0) = f(\alpha, 0)$, *cela pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *En posant* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,0) \end{array}$, *on a bien* $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f(\alpha, \beta) = h(\alpha)$ *et* $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(car* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *et* h *est la première application partielle de* f *en* $(0,0)$*).*

Exercice 10. 1. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Montrer que f *vérifie* $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *si et seulement s'il existe une fonction* $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = h(2x+y).$$

Indication : *on pourra considérer la fonction* $g : (x,y) \mapsto f(x+y, x-2y)$.

2. *Trouver toutes les fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *telles que :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a.$$

Correction.

1. *Supposons que* $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. *Posons* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x+y, x-2y). \end{array}$
Remarquons déjà que l'on a, pour quatre nombres réels x, y, ξ, η, *l'équivalence :*

$$\begin{cases} x + y = \xi \\ x - 2y = \eta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2\xi + \eta}{3} \\ y = \frac{\xi - \eta}{3}, \end{cases}$$

comme on le voit en résolvant le système linéaire. Cela nous permet d'exprimer à son tour f *en* *fonction de g :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g\left(\frac{2x+y}{3}, \frac{x-y}{3}\right).$$

La deuxième règle de la chaîne (appliquée aux fonctions affines $\phi : (x,y) \mapsto x+y$ et $\psi : (x,y) \mapsto x-2y$, toutes deux de classe $\mathscr{C}^1$) montre que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et donne notamment, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée partielle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(a,b),\psi(a,b))\,\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(a,b),\psi(a,b))\,\frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(a,b),\psi(a,b)) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(a,b),\psi(a,b)) = 0.\end{aligned}$$

D'après l'exercice ..., on peut trouver une fonction $h_1 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = h_1(x)$. En posant $h : x \mapsto h_1(3x)$ (qui reste évidemment de classe $\mathscr{C}^1$), on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g\left(\frac{2x+y}{3}, \frac{x-y}{3}\right) = h_1\left(\frac{2x+y}{3}\right) = h(2x+y).$$

Réciproquement, si $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : x \mapsto h(2x+y)$, ? montre que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) - 2\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = h'(2a+b)\times 2 - 2\left(h'(2a+b)\times 1\right) = 0.$$

2. *La fonction $g_0 : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g_0}{\partial x}(a,b) = a \text{ et } \frac{\partial g_0}{\partial y}(a,b) = 0,$$

donc elle vérifie la condition de l'énoncé.

Ainsi, par linéarité, une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifie la condition de l'énoncé si et seulement si la différence $g - g_0$ vérifie la condition de la question précédente.

On en déduit que les fonctions cherchées sont exactement les fonctions de la forme :

$$(x,y) \mapsto \frac{x^2}{2} + h(2x+y),$$

quand h décrit $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Extrema

Exercice 11. *Étudier les extrema éventuels de la fonction $f : (x, y) \mapsto 2x^4 - 3x^2y + y^2$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Correction.

- *f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*
- *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 8a^3 - 6ab$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -3a^2 + 2b$.*
  - *Si (a, b) est point critique de f, alors $\begin{cases} 8a^3 - 6ab = 0 \\ -3a^2 + 2b = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 8a^3 = 9a^3 \\ 2b = 3a^2 \end{cases}$ donc $(a, b) = (0, 0)$. On a donc montré que le seul point critique possible est $(0, 0)$.*
  - *Réciproquement, il est clair que $(0, 0)$ est point critique de f, donc $\underline{(0, 0) \text{ est le seul point critique de } f}$.*
- *Montrons que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$ donc que $(x, y) \mapsto f(x, y) - \underbrace{f(0, 0)}_{=0}$ change de signe au voisinage de $(0, 0)$.*
  - *On a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*,\ f(\varepsilon, 0) = 2\varepsilon^4 > 0 = f(0, 0)$, ce qui prouve que $\underline{f \text{ n'a pas de maximum local en } (0, 0)}$.*
  - *On a $\forall (\varepsilon, \alpha) \in \mathbb{R}^2,\ f(\varepsilon, \alpha\varepsilon^2) = \varepsilon^4(2 - 3\alpha + \alpha^2) = (\alpha - 1)(\alpha - 2)\varepsilon^4$.*
    Or, on sait que $(\alpha - 1)(\alpha - 2) \leq 0 \iff \alpha \in [1, 2]$, donc en prenant $\alpha = 3/2$, on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\varepsilon, \dfrac{3}{2}\varepsilon^2\right) < 0 = f(0, 0)$, ce qui prouve que $\underline{f \text{ n'a pas de minimum local en } (0, 0)}$.

  Ainsi, $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local en } (0, 0)}$, et $\boxed{f \text{ n'a aucun extremum local / global}}$.
  Remarque. *On aurait pu remarquer la factorisation suivante de $f(x, y)$:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 - y)(2x^2 - y).$$

  Si $x^2 > y$, alors $2x^2 > y$, donc $f(x, y) > 0$, et si $x^2 < y < 2x^2$, alors $f(x, y) > 0$.
  On prend ensuite des valeurs de (x, y) bien choisies (au voisinage de $(0, 0)$) montrant que f change de signe au voisinage de $(0, 0)$: $\forall x \neq 0,\ f(x, 0) > 0$ et $f(x, \dfrac{3}{2}x^2) < 0$.

Exercice 12. *On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x\,e^y + y\,e^x. \end{array}$*

1. *Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.*
2. *En étudiant $x \mapsto f(x, -1)$ et $x \mapsto f(x, x)$, montrer que f n'a pas d'extremum local.*

Correction.

1. - *Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto e^x$, etc. sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc par opérations, il en va de même de f.*
   - *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on calcule les dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = e^b + b\,e^a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = a\,e^b + e^a.$$

Un point critique (a,b) doit donc vérifier $e^b + b\,e^a = a\,e^b + e^a = 0$, d'où l'on déduit :

$$0 = a\,e^b + a\,b\,e^a = a\,b\,e^a - e^a = (a\,b-1)e^a,$$

d'où l'on tire $b = 1/a$, puis $e^a + a\,e^{1/a} = 0$.

Or, la fonction $h : t \mapsto e^t + t\,e^{1/t}$ est manifestement strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc ne s'y annule pas et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*,\ h'(t) = e^t + \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{1/t} = e^t + \frac{t-1}{t} e^{1/t} > 0,$$

ce qui montre que h est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
Par ailleurs, on remarque que h s'annule en -1, donc l'unique point d'annulation de h sur $\mathbb{R}$ est en -1, et l'unique point critique possible de f est $(-1,-1)$.

Par ailleurs, il est clair que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = 0$, donc

$$\boxed{(-1,-1) \text{ est le seul point critique de } f}.$$

2. - *La fonction $g : x \mapsto f(x,-1) = e^{-1}\,x - e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : x \mapsto e^{-1} - e^x$, donc g est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, puis strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$, donc g est maximale en -1.*
   Si f admettait un minimum local en $(-1,-1)$, alors g admettrait un minimum local en -1, ce qui n'est pas : donc $\boxed{f \text{ n'admet pas de minimum local en } (-1,-1)}$.
   Alternative : $\forall u \in \mathbb{R},\ g(-1+u) - g(-1) = e^{-1}(1+u-e^u) \leq 0$ *par inégalité de convexité. Donc $g(-1) \geq g(-1+u)$ donc g n'a pas de minimum local en -1 donc f n'admet pas de minimum local en $(-1,-1)$.*
   - *La fonction $h : x \mapsto f(x,x) = 2x\,e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' : x \mapsto 2(1+x)e^{2x}$, donc h est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, puis strictement croissante sur $[-1,+\infty[$, donc h est minimale en -1.*
   Si f admettait un maximum local en $(-1,-1)$, alors h admettrait un maximum local en -1, ce qui n'est pas : donc $\boxed{f \text{ n'admet pas de maximum local en } (-1,-1)}$.
   Alternative : $\forall u \in \mathbb{R},\ h(-1+u) - h(-1) = 2e^{-1}((u-1)e^u - 1)$.
   Or, $(u-1)e^u - 1 = (u-1)\left(1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)\right) - 1 = \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ donc

   $$h(-1+u) - h(-1) \sim e^{-1}u^2 \geq 0.$$

   Par conservation du signe dans les équivalents, on a : $h(-1+u) - h(-1) \geq 0$ quand $u \to 0$ donc $h(-1+u) \geq h(-1)$ donc h n'a pas de maximum local en -1 donc f n'admet pas de maximum local en $(-1,-1)$.

Ainsi, l'unique point critique de f n'est pas un extremum local, donc $\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum local}}$.

Exercice 13. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \langle \nabla f(a) - \nabla f(b), a - b \rangle \geq 0.$$

Montrer que tout point critique de f est un point en lequel f est minimale.

Correction. *Soit a un point critique de f. Montrons que f est minimale en a.*
Soit $b \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $f(b) \geq f(a)$. Posons $v = b - a$.
D'après la première règle de la chaîne, la fonction :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + t\,v) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \langle \nabla f(a + t\,v), v \rangle .$$

En particulier, pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{t} \langle \nabla f(a + t\,v), t\,v \rangle \\ &= \frac{1}{t} \langle \nabla f(a + t\,v) - \nabla f(a), (a + t\,v) - a \rangle && \text{($\nabla f(a) = 0$ car a est point critique)} \\ &\geq 0 && \text{(par hypothèse).} \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction φ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, d'où $\varphi(0) \leq \varphi(1)$ i.e. $f(a) \leq f(b)$, cela pour tout $b \in \mathbb{R}^2$. On a donc montré que $\boxed{f \text{ est minimale en } a}$.