Calculs de déterminants

Exercice 1. Explicite. *Calculer les déterminants suivants à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes.*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Correction.

- $\boxed{D_1 = 0}$ *car la première matrice n'est pas inversible vu que les deux premières colonnes sont colinéaires.*
- $C_3 \leftarrow C_3 - 6C_1$ *donne* $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & -9 \end{vmatrix}$. *En développant selon la première ligne, il vient :* $\boxed{D_2 = -18}$ *(vérifié avec Sarrus).*
- $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ *puis un développement par rapport à la première ligne donne :* $D_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ *en développant par rapport à la deuxième colonne. Ainsi,* $\boxed{D_3 = -1}$.
- *En permutant* $C_1 \leftrightarrow C_4$ *et* $C_2 \leftrightarrow C_3$, *on tombe sur le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, ou bien en développant suivant la dernière colonne à chaque fois, on obtient :* $D_4 = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-4) \times 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-4) \times 4 \times (-4^2) = 4^4 = 16 \times 16 = 256$. *Ainsi,* $\boxed{D_4 = 256}$.

Exercice 2. Avec paramètres. *Soit* $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5$. *Calculer les déterminants suivants (donner une forme factorisée).*

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & c & b & c \\ c & a & c & b \\ b & c & a & c \\ c & b & c & a \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix}.$$

Correction.

- *En utilisant des opérations sur les lignes, on trouve la forme factorisée :* $\boxed{D_1 = -(a-b)^2(2a+b)}$. *On peut, par exemple, commencer par faire* $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, *factoriser par* $(2a+b)$, *puis faire apparaître des 0 sur la première ligne et on obtient un déterminant triangulaire inférieur.*
- $\boxed{D_2 = -8}$. *En effet, en utilisant des opérations sur les colonnes* $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ *puis* $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$,

on obtient :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a^2 & (2a+1) & (2a+3) \\ (a+1)^2 & (2a+3) & (2a+5) \\ (a+2)^2 & (2a+5) & (2a+7) \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} a^2 & (2a+1) & 2 \\ (a+1)^2 & (2a+3) & 2 \\ (a+2)^2 & (2a+5) & 2 \end{vmatrix}.$$

Les opérations sur les lignes $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis le développement selon la troisième colonne donnent :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a^2 & (2a+1) & 2 \\ (2a+1) & 2 & 0 \\ (2a+3) & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} (2a+1) & 2 \\ (2a+3) & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} (2a+1) & 1 \\ (2a+3) & 1 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) = -8.$$

- *L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ donne*

$$D_3 = \begin{vmatrix} (a+b+2c) & c & b & c \\ (a+b+2c) & a & c & b \\ (a+b+2c) & c & a & c \\ (a+b+2c) & b & c & a \end{vmatrix} = (2c+a+b) \begin{vmatrix} 1 & c & b & c \\ 1 & a & c & b \\ 1 & c & a & c \\ 1 & b & c & a \end{vmatrix}.$$

En faisant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, puis en développant selon la première colonne, il vient :

$$D_3 = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & b & c \\ 0 & a-c & c-b & b-c \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & b-c & c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}.$$

D'où $\boxed{D_3 = (a+b+2c)(a+b-2c)(a-b)^2}$.

- *On fait $L_5 \leftarrow L_5 - L_4$ puis $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, ce qui permet d'obtenir une matrice triangulaire supérieure.*

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-d & c-d \\ 0 & 0 & 0 & d-c & d-e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e-d \end{vmatrix} = \boxed{a(b-a)(c-b)(d-c)(e-d)}.$$

Exercice 3. Coefficients binomiaux. *Soit $(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Calculer le déterminant*

$$\Delta_{n,p}=\begin{vmatrix}1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1}\\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1}\end{vmatrix}.$$

Correction. $\Delta_{n,p}=\det\left(\binom{i+1}{j+n}_{1\le i,j\le p}\right)$ *On sent que l'on va appliquer la formule de Pascal :*

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1} \text{ i.e. } \binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}.$$

Cette observation nous incite à faire des opérations sur les lignes. Les opérations successives $L_i\leftarrow L_i-L_{i-1}$ (en remontant) pour tout $i\in[\![2,p]\!]$ donnent : $\Delta_{n,p}=\begin{vmatrix}1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1}\\ 0 & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{p-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \dots & \binom{n+p-2}{p-2}\end{vmatrix}$*. Puis, en développant par rapport à la première colonne, on obtient la formule de récurrence :* $\underline{\Delta_{n,p}=\Delta_{n,p-1}}$*, cela pour tout $p\ge 2$.*

En itérant il vient : $\boxed{\Delta_{n,p}=\Delta_{n,2}=1}$*, car* $\Delta_{n,2}=\begin{vmatrix}1 & \binom{n}{1}\\ 1 & \binom{n+1}{1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{vmatrix}=1$ *et* $\Delta_{1,1}=1$.

Exercice 4. Matrice par blocs. *Calculer le déterminant de la matrice* $A=\left(\begin{array}{c|c}0_n & I_n\\ \hline -I_n & 0_n\end{array}\right)\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Correction. *Notons $C_1,\dots,C_{2n}$ les colonnes de A. On effectue n permutations sur les colonnes de A (pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on fait $C_i\leftrightarrow C_{i+n}$), ce qui permet d'obtenir :*

$$\begin{aligned}\det A&=(-1)^n\det(C_{n+1},C_{n+2}\dots,C_{n+n},C_1,\dots,C_n)\\ &=(-1)^n\det B,\end{aligned}$$

où $B:=\left(\begin{array}{c|c}I_n & 0_n\\ \hline 0_n & -I_n\end{array}\right)$ *est une matrice diagonale de déterminant $(-1)^n$. Ainsi,* $\boxed{\det A=(-1)^n(-1)^n=(-1)^{2n}=1}$.

Exercice 5. Imbriqué. *Soit $(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant* $D=\begin{vmatrix}s_1 & \dots & \dots & s_1\\ \vdots & s_2 & \dots & s_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n\end{vmatrix}$.

Correction. *On effectue successivement les opérations :*

$$L_n\leftarrow L_n-L_{n-1},\quad L_{n-1}\leftarrow L_{n-1}-L_{n-2},\quad \dots,\quad L_2\leftarrow L_2-L_1.$$

On obtient le déterminant triangulaire suivant :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 - s_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & s_n - s_{n-1} \end{vmatrix} = \boxed{s_1 \prod_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1})}.$$

Exercice 6. Le déterminant a,b,c. *Soit $n \geq 2$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.*
On note $D(a,b,c)$ le déterminant de taille n suivant :

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

1. *On considère la fonction $f : x \longmapsto D(a+x, b+x, c+x)$ définie sur $\mathbb{R}$.*
   Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. *En déduire la valeur de $D(a,b,c)$ pour $b \neq c$.*

Correction.

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Si l'on retranche la première colonne à chacune des autres colonnes, on obtient :*

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

   En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

   Le premier déterminant ne dépend pas de x, notons-le α.

   Le deuxième peut se réécrire, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, sous la *forme :*

$$x\begin{vmatrix} 1 & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ 1 & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Il est donc de la forme βx où β est un réel indépendant de x.

On en déduit que $\boxed{f(x) = D(a+x, b+x, c+x) = \alpha + x\beta \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$.

Donc, $\boxed{f \text{ est bien une fonction polynomiale de degré au plus } 1}$.

2. *Ainsi,* $\boxed{D(a,b,c) = f(0)}$. *On va donc chercher à déterminer les valeurs de α et β définis précédemment. Remarquons que*

$$f(-c) = \begin{vmatrix} a-c & 0 & \cdots & 0 \\ b-c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-c & \cdots & b-c & a-c \end{vmatrix},$$

est un déterminant triangulaire, égal au produit des termes de la diagonale :

$$\boxed{f(-c) = (a-c)^n}.$$

De la même manière, $\boxed{f(-b) = (a-b)^n}$.

Il ne reste plus qu'à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta c & = (a-c)^n \\ \alpha - \beta b & = (a-b)^n. \end{cases}$$

On obtient, après résolution, comme $b \neq c$:

$$\boxed{\alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c}.$$

Cela nous donne finalement :

$$\boxed{D(a,b,c) = f(0) = \alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}}.$$

Exercice 7. Tridiagonal. *Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par D_n le déterminant de la matrice $n \times n$ de terme général $m_{i,j}$ défini par : $m_{i,i} = a, \quad m_{i,i+1} = c, \quad m_{i,i-1} = b$, les autres termes étant nuls.*

1. *Calculer D_1, D_2, D_3.*
2. *Pour $n \geq 3$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.*
3. *On suppose que $a^2 = 4bc$. Déterminer D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *Déterminer la valeur de D_n dans les cas suivants :*

   (a) $a = 5$, $b = 1$, $c = 6$. *(b)* $a = 2\cos\theta$, $b = c = 1$.

Correction.

1. $D_1 = a$; $D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc$; $D_3 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc.$

2. *Soit $n \geq 3$. On a* $D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & c & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}$. *En développant D_n selon la dernière colonne,*

   on a : $D_n = aD_{n-1} - c\Delta$, *où* $\Delta = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a & c \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b \end{vmatrix}$. *En développant selon la dernière ligne de Δ, on obtient :* $\Delta = bD_{n-2}$ *donc*

   $$\boxed{\forall n \geq 3,\ D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}}.$$

   Ainsi, la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

   $$r^2 - ar + bc = 0.$$

3. *Ici $a^2 - 4bc = 0$ donc l'équation caractéristique a un discriminant nul, donc possède une racine double :* $\frac{a}{2}$.
   Par théorème, il existe (un unique) couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (\alpha + \beta n)\left(\frac{a}{2}\right)^2$.
   Les conditions initiales , $D_1 = (\alpha+\beta)\frac{a}{2} = a$ *et* $D_2 = (\alpha + 2\beta)\frac{a^2}{4} = a^2 - bc = \frac{3a^2}{4}$, *assurent que* $\alpha + \beta = 2$ *et* $\alpha + 2\beta = 3$, *ce qui donne (après calculs)* $\alpha = 1 = \beta$, *donc*

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (1+n)\left(\frac{a}{2}\right)^n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}}.$$

4. (a) *Supposons que* $a = 5$, $b = 1$, $c = 6$. *Alors* $\forall n \geq 3$, $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$. *La suite* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique* $r^2 - 5r + 6 = 0 = (r-2)(r-3)$. *Ainsi, il existe un unique couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$.
Or, les conditions initiales $D_1 = 5 = 2\alpha + 3\beta$ *et* $D_2 = 19 = 4\alpha + 9\beta$ *donnent* $\alpha = -2$ *et* $\beta = 3$ *d'où* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}}$. *(vérif OK avec* D_3*)*

(b) *Supposons que* $a = 2\cos\theta$, $b = c = 1$. *Alors* $\forall n \geq 3$, $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$. *La suite* (D_n) *est donc récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique* $r^2 - (2\cos\theta)r + 1 = 0$ *i.e.*

$$(r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) = 0.$$

Remarquons que $e^{i\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{i\theta} \in \mathbb{R} \iff \sin\theta = 0 \iff \theta \equiv 0\ [\pi]$.
Distinguons les cas.

- *Si* $\theta \equiv 0\ [\pi]$, *alors on se retrouve dans le cas de la question 3 avec une racine double* $e^{i\theta} = \cos\theta = \pm 1$, *et on trouve que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (n+1)\cos^n\theta$. *Plus précisément,*
  - *si* $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, *alors* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = 1 + n}$ *;*
  - *si* $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, *alors* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (1+n)(-1)^n}$.
- *Supposons que* $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. *Alors l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle mais deux solutions complexes conjuguées et il existe un unique couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta).$$

Or $D_1 = 2\cos\theta = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$ *et* $D_2 = 4\cos^2\theta - 1 = \alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta)$. *En posant* $x = \cos\theta$ *et* $y = \sin\theta$, *les équations se ré-écrivent :*

$$D_1 = 2x = \alpha x + \beta y \quad \text{et} \quad D_2 = 4x^2 - 1 = \alpha(2x^2 - 1) + 2\beta xy,$$

ce qui aboutit au système :

$$\begin{cases} (\alpha - 2)x + \beta y &= 0 \\ 2(\alpha-2)x^2 + 2\beta xy &= \alpha - 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2xL_1}{\iff} \begin{cases} (\alpha-2)x + \beta y &= 0 \\ 0 &= \alpha - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta y &= x \\ \alpha &= 1. \end{cases}$$

Comme $y = \sin\theta \neq 0$, *on a* $\beta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta\cos(n\theta) + \cos\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}} = U_n(\cos\theta)$, *où on a pu reconnaître* U_n, *le polynôme de Tchebychev de deuxième espèce.*

Exercice 8. Déterminant de Vandermonde. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des complexes. On note*

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et le but de cet exercice est de calculer $V_n(x_1,\dots,x_n)$.

1. *Preuve constructive, par récurrence.*

   (a) *Montrer que pour tout $n \geq 2$, $V_n(x_1,\dots,x_n) = V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)$.*

   (b) *En déduire $V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$.*

Correction.

(a) *Le but est d'annuler la dernière colonne. Pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, on effectue l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i - x_n L_{i-1}$ en remontant, et on obtient :*

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & \dots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, puis en factorisant selon chaque colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} V_n(x_1,\dots,x_n) &= (-1)^{n-1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ \underline{V_n(x_1,\dots,x_n)} &= \underline{\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})}. \end{aligned}$$

N.B. *: une matrice de Vandermonde de paramètres $x_1,\dots,x_n$ est inversible ssi les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux distincts.*

(b) *En itérant, on trouve que*

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k) \prod_{k=1}^{n-2}(x_{n-1} - x_k) \dots\dots \prod_{k=1}^{2}(x_3 - x_k) V_2(x_1,x_2).$$

Or, $V_2(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$. *D'où :* $\boxed{V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}$.

2. *Preuve par récurrence, utilisant les polynômes.*

   Considérons la fonction $P : x \mapsto V_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$.

   (a) *Justifier que* $x \mapsto P(x)$ *est une fonction polynomiale, de degré* $\leq n-1$ *et déterminer son coefficient de degré* $n-1$.

   (b) *Montrer par récurrence sur* $n \geq 2$ *que* $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

   Correction.

   (a) *En développant par rapport à la dernière colonne, on voit que* $x \mapsto P(x)$ *est une fonction polynomiale de degré* $\leq n-1$ *et le coefficient de degré* $n-1$ *est* $a_{n-1} := (-1)^{2n} V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

   (b)
   - *Initialisation :* $V_2(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ *donc la formule est vérifiée.*
   - *Hérédité : soit* $n \geq 3$ *tel que la propriété au rang* $n-1$ *est vraie.*
     Par hypothèse de récurrence, $a_{n-1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$.
     - *Premier cas : si les* x_i *sont deux à deux distincts, alors* $a_{n-1} \neq 0$ *donc* *P est de degré* $n-1$.
       Or, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(x_i) = 0$ *(deux colonnes sont égales) donc* *P a au moins* $n-1$ *racines distinctes*. *Comme* $\deg(P) = n-1$ *et* $P \neq 0$, *on a la factorisation :*

       $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) &= a_{n-1}(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

       En particulier,

       $$\boxed{V_n(x_1, \dots, x_n) = P(x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}.$$

     - *Deuxième : si au moins deux* x_i *sont égaux, alors deux colonnes de* $V_n(x_1, \dots, x_n)$ *sont égales donc*

       $$\boxed{V_n(x_1, \dots, x_n) = 0 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}.$$

     - *Dans tous les cas, l'hérédité est démontrée.*

- *Conclusion :* $\boxed{\forall n \geq 2,\ V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i)}$.

Exercice 9. *Étant donnés quatre complexes a,b,c,d, calculer* $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

Preuve subtile, utilisant les polynômes.

- *Si au moins deux des coefficients a, b, c sont égaux alors au moins deux colonnes de D sont égales donc $\underline{D = 0}$.*
- *Si a, b, c sont deux à deux distincts, on introduit la fonction* $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4 \end{vmatrix} \end{array}$.

  P est une fonction polynomiale, qui possède a, b et c comme racines évidentes, de degré 4, de coefficient dominant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) = V_3(a,b,c)$$

  (déterminant de Vandermonde, non nul, car a, b, c sont distincts). Ainsi, on obtient la factorisation dans $\mathbb{C}$:

$$P(x) = V_3(a,b,c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-r),$$

  où r est une racine complexe à déterminer.
  Remarquons que $P(x)$ n'a pas de terme en x^3, ce qui implique que la somme des racines de P est nulle. On en déduit que $a+b+c+r=0$ d'où $\underline{r = -(a+b+c)}$. Finalement :

$$P(x) = V_3(a,b,c)(x-a)(x-b)(x-c)(x+a+b+c).$$

  Le déterminant cherché est $D = P(d) = V_3(a,b,c)(d-a)(d-b)(d-c)(d+a+b+c)$, donc

$$\boxed{D = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)(d+a+b+c)}.$$

Preuve maline, se ramenant à un déterminant de Vandermonde, à l'aide d'un déterminant augmenté.
On suppose encore que a, b, c et d sont deux à deux distincts (sinon, $D = 0$). On introduit

$$Q : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}.$$

Q est une fonction polynomiale. Son coefficient devant x^4 est $V_4(a,b,c,d) \neq 0$ donc $\deg(Q) = 4$. De plus, Q admet a, b, c, d comme racines évidentes distinctes donc on a la factorisation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = V_4(a,b,c,d)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Le coefficient devant x^3 vaut $-D$ et il vaut aussi $-(a+b+c+d)V_4(a,b,c,d)$ (via les relations coefficients-racines). Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c+d)V_4(a,b,c,d) \\ &= (a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a). \end{aligned}$$

Preuve bourrine, en faisant des opérations élémentaires.

Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$, et la factorisation par $(b-a)(c-a)(d-a)$ donnent :

$$D = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^4 & (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}.$$

Puis, les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_2$ et la factorisation par $(c-b)(d-b)$ donnent :

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 1 \\ a^4 & (b+a)(b^2+a^2) & e & f \end{vmatrix},$$

où $e = a^2 + a(c+b) + c^2 + cb + b^2$ et $f = a^2 + a(d+b) + d^2 + db + b^2$ donc $f - e = (d-c)(a+b+c+d)$. Enfin l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, donne :

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 0 \\ a^4 & (b+a)(b^2+a^2) & e & (d-c)(a+b+c+d) \end{vmatrix},$$

qui est un déterminant triangulaire inférieur. Finalement,

$$\boxed{D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)}.$$

Exercice 10. Déterminants circulants. *Soient $a_1, \dots, a_n$ des complexes et $\theta_1, \dots, \theta_n$ les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On note*

$$C_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Omega_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \dots & \theta_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $\det(C_3)$. **Indication :** *On pourra commencer par calculer* $\det(C_3\Omega_3)$.
2. *Calculer* $\det(C_4)$.

Correction.

1. *On remarque que* $\det(\Omega_3) = V_3(1, j, j^2)$.
$C_3\Omega_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a+bj+cj^2 & a+bj^2+cj \\ a+b+c & j(a+bj+cj^2) & j^2(a+bj^2+cj) \\ a+b+c & j^2(a+bj+cj^2) & j(a+bj^2+cj) \end{pmatrix}$, *donc, en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne, on a*
$$\det(C_3\Omega_3) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$$
donc $\det(C_3)\det(\Omega_3) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)\det(\Omega_3)$. *Comme* $\det(\Omega_3) \neq 0$ *(il s'agit d'un déterminant de Vandermonde avec les 3 racines troisième de l'unité qui sont 2 à 2 distinctes), on a alors :*
$$\boxed{\det(C_3) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)}.$$

2. *On remarque que* $\det(\Omega_4) = V_4(1, -1, i, -i)$.
$$\begin{aligned} C_4\Omega_4 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c+d & a-b+c-d & a+ib-c-id & a-ib-c+id \\ a+b+c+d & -(a-b+c-d) & i(a+ib-c-id) & -i(a-ib-c+id) \\ a+b+c+d & a-b+c-d & -(a+ib-c-id) & -(a-ib-c+id) \\ a+b+c+d & -(a-b+c-d) & -i(a+ib-c-id) & i(a-ib-c+id) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
donc
$\det(C_4)\det(\Omega_4) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+ib-c-id)(a-ib-c+id)\det(\Omega_4)$.
Comme $\det(\Omega_4) \neq 0$ *(vu que les racines 4e de l'unité sont 2 à 2 distinctes), on a alors :*
$$\boxed{\det(C_4) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+ib-c-id)(a-ib-c+id)}.$$

Exercice 11. Matrices semblables. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = P^{-1}BP$. On décompose $P = R + iS$ avec R et S dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(R + xS)A = B(R + xS)$.*
2. *En déduire qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = Q^{-1}BQ$.*

Correction.

1. *Par hypothèses : $PA = BP$ donc $(R + iS)A = B(R + iS)$ d'où $RA + iSA = BR + iBS$.*
Par unicité de l'écriture d'un complexe sous forme algébrique (appliquée à chaque coefficient des matrices), on obtient
$$RA = BR \quad \text{et} \quad SA = BS.$$
Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (R + xS)A = RA + xSA = BR + xBS = B(R + xS)}$.

2. *Considérons* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \det(R + xS) \end{array}$. *Montrons que f n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$.*
Supposons par l'absurde que f soit nulle sur $\mathbb{R}$. Alors f serait une fonction polynomiale ayant une infinité de zéros donc f serait nulle sur $\mathbb{C}$.
Or, on sait que $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $P = R + iS$, ce qui assure que $f(i) = \det P \neq 0$: contradiction.
Ainsi, on peut trouver $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. En posant $\boxed{Q := R + x_0 S}$, *on en déduit que $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et d'après la question 1., on a $QA = BQ$ donc* $\boxed{A = Q^{-1}BQ}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs et d'une application linéaire

Exercice 12. Déterminant d'une famille de vecteurs. *Soient $x \in \mathbb{R}$, $u = (x, 3, 3)$, $v = (2, x, 0)$ et $w = (1, 0, x)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la famille (u, v, w) soit libre.*

Correction.

En développant par rapport à la troisième colonne :

$$\det_{b.c.}(u, v, w) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix} = -3x + x(x^2 - 6) = x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3).$$

Ainsi, $\boxed{(u, v, w) \text{ est libre ssi } \det_{b.c.}(u, v, w) \neq 0 \text{ ssi } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}}$.

Exercice 13. Joli ! *Soient $z_0, z_1, \dots, z_n$ des complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille*

$$\mathcal{F} := ((X-z_0)^n, (X-z_1)^n, \dots, (X-z_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction. *$\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et la famille $\mathcal{F}$ est constituée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$. On a :*

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad (X-z_j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-z_j)^{n-k} X^k.$$

Le déterminant de la famille $((X-z_j)^n)_{0 \leq j \leq n}$ dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est donc :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \dots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \dots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \dots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît, à l'ordre près des lignes, un déterminant de Vandermonde, déterminant qui est non nul, puisque les z_i sont supposés distincts. La famille des $n+1$ polynômes est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 14. Déterminant d'une application linéaire.

1. *Calculer le déterminant de l'application linéaire* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP'(X+2) + P(1)(X^3-1). \end{array}$

2. *f est-elle bijective ?*

Correction.

1. *Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*

   $f(1) = X^3 - 1$;
   $f(X) = X^3 + X - 1$;
   $f(X^2) = X^3 + 2X^2 + 4X - 1$;
   $f(X^3) = 4X^3 + 12X^2 + 12X - 1$.

   $$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

   $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$ donne : $\det(f) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, *qui est le déterminant d'une matrice triangulaire. Ainsi,* $\boxed{\det(f) = -6}$.

2. $\boxed{\det(f) \neq 0 \text{ donc } f \text{ est bijective}}$.

Exercice 15. Déterminant de projecteurs et symétries.

1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.*
   (a) *Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Calculer le déterminant de s. En déduire les valeurs possibles pour $\det(s)$.*
   (b) *Soit π le projecteur sur F parallèlement à G. Calculer le déterminant de π. En déduire les valeurs possibles pour $\det(\pi)$.*
2. *Calculer le déterminant de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array}$.*

Correction.

1. *F et G sont donc de dimension finie. Notons $p := \dim(F) \in \mathbb{N}$, alors $\dim(G) = n - p \in \mathbb{N}$, et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G (éventuellement vides si F ou G est $\{0_E\}$). Alors la famille $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.*
   (a) *Dans le cas d'une symétrie, on a : $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$. La matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est alors une matrice diagonale, avec sur la diagonale p « 1 » et $(n-p)$ « -1 » et on a alors : $\boxed{\det s = (-1)^{n-p} = (-1)^{\dim G}}$ et $\boxed{\det s \in \{\pm 1\}}$.*
   Autre méthode. *Comme s est une symétrie, elle vérifie $s^2 = \operatorname{Id}_E$. En appliquant le déterminant, qui est multiplicatif et vaut 1 sur Id_E, on obtient : $(\det s)^2 = 1$ d'où $\det s = \pm 1$.*
   (b) *Dans le cas d'un projecteur, on a : $F = \operatorname{Ker}(\pi - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(\pi)$. La matrice de π dans cette base est alors une matrice diagonale, avec sur la diagonale p « 1 » et $(n-p)$ « 0 » et on a alors : $\boxed{\det \pi = 0^{n-p} = 0^{\dim G}}$ et $\boxed{\det(\pi) \in \{0, 1\}}$.*
   Autre méthode. *Comme π est un projecteur, il vérifie $\pi^2 = \pi$. En appliquant le déterminant, qui est multiplicatif, on obtient : $(\det \pi)^2 = \det \pi$ d'où $\det \pi \in \{0, 1\}$.*
   Remarque : $\det \pi = 1 \iff \dim G = 0 \iff F = E \iff \pi = \operatorname{Id}_E$.
2. *Rappelons que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et que φ est la symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. D'après la question 1., on en déduit que :*

$$\boxed{\det(\varphi) = (-1)^{\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K})} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Exercice 16. Un classique. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v + v \circ u = 0$, u est injectif et v surjectif. Montrer que n est pair.*

Correction. *Par hypothèse $u \circ v = -v \circ u$ donc*

$$\det(u)\det(v) = \det(u \circ v) = \det(-v \circ u) = (-1)^n \det(v \circ u) = (-1)^n \det(v)\det(u).$$

Ainsi,

$$\det(u)\det(v)(1 - (-1)^n) = 0.$$

Or, $\det u \neq 0$ et $\det v \neq 0$ car u et v sont bijectifs vu que ce sont des endomorphismes en dimension

finie et que dans ce cas, injectif équivaut à surjectif équivaut à bijectif.
Ainsi, $1-(-1)^n = 0$ *puis* $(-1)^n = 1$ *d'où* $\boxed{n \text{ est pair}}$.

Le déterminant comme outil de caractérisation

Exercice 17. Matrices antisymétriques inversibles.

1. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer* $\mathscr{A}_{2p+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_{2p+1}(\mathbb{R})$.
2. *Étudier* $\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Correction.

1. *Soit* $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ *donc* $A^T = -A$. *Or, d'après le cours,* $\det(A) = \det(A^T)$. *Pour une matrice antisymétrique, on déduit que* $\det(A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. *Donc*

$$\det(A)(1-(-1)^n) = 0.$$

***Si n est impair**, il vient :* $2\det(A) = 0$, *puis* $\boxed{\det(A) = 0 \text{ d'où } A \text{ n'est pas inversible}}$.
$\boxed{\text{Dans } \mathscr{M}_{2p+1}(\mathbb{R}), \text{ les matrices antisymétriques ne sont pas inversibles}}$ *i.e.* $\boxed{\mathscr{A}_{2p+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_{2p+1}(\mathbb{R}) = \varnothing}$.

2.
   - *Notons* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. *On a* $\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(A)$.
   Par contre, $0_2 \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ *mais* $0_2 \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   On en déduit que dans $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, *il existe des matrices inversibles et d'autres non. Seule la matrice nulle est non inversible, et* $\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{aA,\ a \in \mathbb{R}^*\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^* \right\}$.
   - ***pour*** $\boldsymbol{\mathscr{A}_4(\mathbb{R})}$, *la matrice* $C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_2 \\ \hline 0_2 & 0_2 \end{array}\right)$ *est de rang 2 donc non inversible, non nulle, et antisymétrique.*

$\boxed{\text{Ainsi, dans } \mathscr{A}_{2p}(\mathbb{R}), \text{ il existe des matrices inversibles et d'autres non.}}$

Exercice 18. Une diagonalisation. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer l'ensemble des réels* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $A - \lambda I_3$ *ne soit pas inversible.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Résoudre l'équation d'inconnue* $X \in \mathbb{R}^3$ *donnée par* $(A - \lambda I_3)X = 0$.
3. *En déduire que la matrice* A *est semblable à une matrice diagonale.*

Correction.

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On sait que :*

$$A - \lambda I_3 \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0.$$

Or,

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & \lambda-2 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda[(1-\lambda)(\lambda-2)+2] = \lambda(-\lambda^2+3\lambda) = \lambda^2(3-\lambda),$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, *puis* $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, *puis en développant selon la dernière ligne.*
Ainsi,

$$\boxed{A - \lambda I_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 3)}.$$

2.
   - *Si* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$ *alors* $A - \lambda I_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ *donc l'équation* $(A - \lambda I_3)X = 0$ *admet une unique solution :* $0_{\mathbb{R}^3}$. *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$.
   - *Si* $\lambda = 0$ *alors* $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 0 \Longleftrightarrow y = x + z.$

     Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.
   - *Si* $\lambda = 3$ *alors* $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z & = 0 \\ -x - 2y - z & = 0 \\ x - y - 2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z & = 0 \\ -x - 2y - z & = 0 \\ -3y - 3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x & = -y \\ z & = -y. \end{cases}$ *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

3.
   - *Notons* $v_1 := (1,1,0)$, $v_2 := (0,1,1)$ *et* $v_3 := (1,-1,1)$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* A. *Dès lors, d'après la question 2.,* $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 0$ *et* $f(v_3) = 3v_3$.

- *De plus, $\mathscr{B} := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (elle est libre maximale - car son déterminant vaut $3 \neq 0$ et .*
- *Alors* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D$ *donc* $\boxed{\text{A est semblable à la matrice diagonale D}}$.

Exercice 19. Densité des matrices inversibles. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer :*

$$\exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad 0 < |\varepsilon| < \alpha, \quad A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

Indication : *on pourra considérer la fonction $x \mapsto \det(A + xI_n)$.*

Correction. *Soit la fonction* $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \det(A + xI_n) \end{array}$.

En développant successivement par rapport aux lignes, on observe P est un polynôme unitaire et de degré n, donc non nul, donc il ne possède donc qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$, et dans $\mathbb{R}$.
En particulier, il existe un voisinage de 0 privé de 0 sur lequel P ne s'annule pas, donc il existe $\alpha > 0$ tel que P ne s'annule pas en x, pour x non nul tel que $|x| < \alpha$. La caractérisation de l'inversibilité des matrices en fonction de la non-nullité des déterminants donne le résultat.

Exercice 20. Résolution d'un système de Cramer.

On rappelle qu'un **système de Cramer** *est un système carré (qui possède autant d'équations que d'inconnues) et une unique solution (i.e. dont le déterminant est non nul).*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. *Montrer que le système linéaire* $(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n, \end{cases}$ *admet une unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ donnée par :*
$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$
où A_j est la matrice déduite de A en remplaçant la j^e colonne par le second membre du système linéaire.
2. **Application.** *Vérifier cette formule dans le cadre d'un système 2×2 avec second membre, possédant une unique solution.*

Correction.

1. - *$(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ car A est inversible vu que $\det(A) \neq 0$. Le système admet donc une unique solution donc il est de Cramer.*
   - **Méthode 1.** *De plus, $(S) \Leftrightarrow x_1C_1 + \ldots x_nC_n = B$ où C_j sont les vecteurs colonnes de la matrice A.*

Par définition, $\det(A) = \det_{b.c.}(C_1, \dots, C_n)$ *donc pour* $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
x_j \det(A) &= \det_{b.c.}(C_1, \dots, C_{j-1}, x_j C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \\
&= \det_{b.c.}(C_1, \dots, C_{j-1}, B - \sum_{k=1, k\neq j}^{n} x_k C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \qquad \textit{en remplaçant} \\
&= \det_{b.c.}(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n) \qquad \textit{par antisymétrie du déterminant} \\
&= \det(A_j).
\end{aligned}$$

Méthode 2. *En écrivant les matrices grâce à leurs colonnes, on a* $A_j = (C_1 \dots C_{j-1} B C_{j+1} \dots C_n)$ *et en faisant du calcul matriciel par colonne, sachant que* $\forall k \neq j$, $A^{-1}C_k = A^{-1}col_k(A) = col_k(A^{-1}A) = col_k(I_n) = \varepsilon_k$ *et* $A^{-1}B = X$*), on obtient*

$$A^{-1}A_j = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1} X \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_n).$$

En passant au déterminant et en développant celui de droite par rapport à la j*-ème ligne, il vient*

$$\det(A^{-1}A_j) = x_j \textit{ d'où, par multiplicativité du déterminant, } \boxed{\frac{\det A_j}{\det A} = x_j}.$$

2. *Soit*

$$(S) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, (S) *a une unique solution donc* (S) *est de Cramer donc* A *est inversible et* $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

- *On vient de montrer que :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{de - bf}{ad - bc} \qquad \textit{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

- *On savait déjà que :*

$$\begin{aligned}
(S) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \qquad \textit{or } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} de - bf \\ af - ce \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\textit{la formule est bien vérifiée pour } n = 2}$.