

Dans tous les exercices, les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Sauf mention du contraire, n désigne un entier naturel non nul.

Compléments de cours

Exercice 1. Minimum de fonction. Soit X une variable aléatoire réelle. Déterminer le minimum de la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$m \mapsto \mathbb{E}((X - m)^2).$$

Correction.

- **Première méthode.** Par linéarité de l'espérance, on a, pour tout réel m :

$$\begin{aligned} \phi(m) &= \mathbb{E}((X - m)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2mX + m^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2m\mathbb{E}(X) + m^2 \\ &= (m - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \underbrace{(m - \mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbb{V}(X)}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Le minimum est obtenu pour $m = \mathbb{E}(X)$ et vaut $\mathbb{V}(X)$.

- **Deuxième méthode.** Le même développement donne que $m \mapsto \phi(m)$ est une fonction polynomiale de degré 2, de coefficient dominant positif, donc sa courbe est une parabole tournée vers le haut, qui a un minimum atteint en le point d'annulation de la dérivée i.e. $m = \mathbb{E}(X)$, et ce minimum vaut $\phi(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{V}(X)$.

Exercice 2. Fonction de répartition. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. On définit la fonction F_X , appelée **fonction de répartition de X** , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

1. Montrer que F_X est croissante et déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X \geq x_k) - \mathbb{P}(X \geq x_{k+1})$.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle telle que $Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \iff F_X = F_Y.$$
4. Tracer F dans le cas où $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$, $X \sim \mathcal{B}(1/4)$ et $X \sim \mathcal{B}(3, 1/2)$.

Correction.

1. • Remarquons que $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.
 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.
 On a $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ donc par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y)$ i.e. $F_X(x) \leq F_X(y)$.
 Ainsi, F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x < x_1$, on a $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$, donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0}$.
 - Pour tout $x \geq x_n$, on a $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$, donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1}$.
2. • On a : $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(X = x_k) = P(X \leq x_k) - P(X \leq x_{k-1}) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a :

$$\{X \geq x_k\} = \{X = x_k\} \sqcup \{X \geq x_{k+1}\}.$$

L'union étant disjointe, on a : $P(X \geq x_k) = P(X = x_k) + P(X \geq x_{k+1})$, ce qui permet de conclure.

3. • Supposons que X et Y suivent la même loi. En particulier, on a alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = x_k) = P(Y = x_k)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x < x_1$, alors $F_X(x) = P(X \leq x) = 0 = F_Y(x)$.
 - Si $x \geq x_n$, alors $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + \dots + P(X = x_n) = 1$. De même, $F_Y(x) = 1$.
 - Sinon, il existe $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $x_{k-1} \leq x < x_k$ et

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \leq x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} P(Y = x_i) = P(Y \leq x_{k-1}) = P(Y \leq x) \\ &= F_Y(x). \end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = F_Y(x)$, ce qui prouve que $\underline{F_X = F_Y}$.

- Supposons que $F_X = F_Y$. On sait déjà que $X(\Omega) = Y(\Omega)$.
Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Alors $P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) = F_Y(x_k) - F_Y(x_{k-1}) = P(Y = x_k)$.
De plus, $P(X = x_1) = F_X(x_1) = F_Y(x_1) = P(Y = x_1)$. Ainsi, X et Y ont la même loi.
- On a donc l'équivalence.

$\boxed{\text{La fonction de répartition d'une v.a. caractérise sa loi.}}$

4. • Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$, alors $X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{4}$.

Ainsi,
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0,25 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,5 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,75 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- Si $X \sim \mathcal{B}(1/4)$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

Ainsi,
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Si $X \sim \mathcal{B}(3, 1/2)$, alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $P(X = k) = \binom{3}{k} \frac{1}{8}$ donc $P(X = 0) = P(X =$

$3) = \frac{1}{8}$ et $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$. Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 3. Une autre expression de l'espérance. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

Première preuve. Partons de la définition de l'espérance, et détaillons pour comprendre :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^n iP(X = i) \\ &= P(X = 1) + 2P(X = 2) + \dots + nP(X = n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(X = i) + \sum_{i=2}^n P(X = i) + \dots + P(X = n) \\ &= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \dots + P(X \geq n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X \geq k). \end{aligned}$$

Sans les ..., cela revient à déguiser k en $\sum_{i=1}^k 1$, et faire apparaître une somme double indexée sur un triangle :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n iP(X = i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i P(X = i) = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} P(X = i) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n P(X = i) \right) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

Bien sûr, on peut écrire ces égalités « dans l'autre sens », ce qui est plus facile !

Deuxième preuve. Puisque X prend des valeurs entières, on a pour tout entier k ,

$$\{X \geq k\} = \{X = k\} \sqcup \{X \geq k + 1\},$$

donc par additivité de P :

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n kP(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k[P(X \geq k) - P(X \geq k+1)] \\
 &= \sum_{k=1}^n [kP(X \geq k) - (k+1)P(X \geq k+1)] + \sum_{k=1}^n P(X \geq k+1) && \text{(ré-écriture)} \\
 &= P(X \geq 1) - \underbrace{(n+1)P(X \geq n+1)}_{=0} + \sum_{\ell=2}^{n+1} P(X \geq \ell) && \text{(télescopage et chgt d'indice)} \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X \geq k) && \text{(car } P(X \geq n+1) = 0).
 \end{aligned}$$

Exercice 4. Formule du crible. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des évènements d'un espace probabilisé (Ω, P) .

1. Montrer que $1 - \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.
2. En déduire que $\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$.
3. En déduire la formule du crible :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Correction.

1. Sachant que pour tous ensembles A et B , on a $\boxed{1 - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\overline{A}}}$ et $\boxed{\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}}$, on obtient les égalités d'applications :

$$\prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\overline{A_i}} = \mathbb{1}_{\overline{A_1 \cap \dots \cap A_n}} = \mathbb{1}_{\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}} = 1 - \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}.$$

2. En utilisant la question 1. puis en développant $\prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$, on obtient :

$$1 - \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = 1 + \sum_{\substack{I \subset [1, n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{Card}(I)} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i},$$

d'où

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{Card}(I)-1} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{Card}(I)-1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

En regroupant les termes selon le cardinal k de I , on obtient :

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}.$$

3. Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Couple de variables aléatoires

Exercice 5. Lois marginales. La loi jointe de deux variables aléatoires (X, Y) est donnée par $P(X = i ; Y = j) = c(2i + j)$ pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \times \llbracket 0, 3 \rrbracket$ (et 0 partout ailleurs).

1. Que vaut c ?
2. Calculer $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction.

1. On choisit c de sorte que $\sum_{i,j} P(X = i, Y = j) = 1$. Or $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (2i + j) = 42$. Ainsi, $\boxed{c = 1/42}$.

2. Calculons :

$$\begin{aligned} \boxed{P(X \geq 1, Y \leq 2)} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^2 c(2i + j) \\ &= 2c \times 3 \times 3 + c \times 2 \times 3 \quad \text{en découpant les sommes} \\ &= \boxed{24c = 4/7}. \end{aligned}$$

3. Par application de la définition des espérances :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \boxed{\mathbb{E}(X)} &= 0 + P(X = 1) + 2P(X = 2) = c \sum_{j=0}^3 (2+j) + 2c \sum_{j=0}^3 (4+j) = c(14+44) = \boxed{58c = 29/21}. \\ \bullet \quad \boxed{\mathbb{E}(Y)} &= P(Y = 1) + 2P(Y = 2) + 3P(Y = 3) = c \sum_{i=0}^2 (2i + 1) + 2c \sum_{i=0}^2 (2i + 2) + 3c \sum_{i=0}^2 (2i + 3) \\ &= c(1+4+9) + 2c(2+4+6) + 3c(3+6+9) = c(14+20+45) = \boxed{79c = 19/7}. \end{aligned}$$

$$3) \boxed{= 78c = 39/21 = 13/7}.$$

$$\bullet \quad \boxed{\mathbb{E}(XY)} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 ijP(X=i, Y=j) \boxed{= 102c = 17/7}.$$

4. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple

$P(X=0, Y=0) = 0 \neq (6c)^2 = P(X=0)P(Y=0)$, ou encore car $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ (contraposée d'une proposition du cours).

Exercice 6. Produit et minimum de deux variables aléatoires. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles prenant ses valeurs sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 0, 3 \rrbracket$ avec les probabilités définies ci-dessous ($a \in [0, 1]$).

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0.1	0.2	a	0.1
2	0.1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.2	0

- Déterminer a pour qu'on ait bien une loi de probabilité.
- Déterminer les lois marginales de X et Y . X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
- Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, former les tables des lois conditionnelles $P_{Y|X=i}$.
- Soient $U = XY$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer les lois de U et V .

Correction.

1. $\boxed{a = 0, 1}.$

2. Les lois de X et Y sont données par :

$k \in X(\Omega)$	1	2	3	Total
$P(X=k)$	0,5	0,2	0,3	1

 et

$k \in Y(\Omega)$	1	2	3	Total
$P(Y=k)$	0,3	0,2	0,3	1

$P(X=2, Y=1) = 0 \neq P(X=2)P(Y=1)$ donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}.$

3. $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1,8}$, $\mathbb{E}(X^2) = 4$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = 0,76}$.
 $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 1,4}$, $\mathbb{E}(Y^2) = 3,2$, et $\boxed{\mathbb{V}(Y) = 1,24}$.

4.

$k \in Y(\Omega)$	0	1	2	3	Total
$P_{(X=1)}(Y=k)$	0,2	0,4	0,2	0,2	1

$k \in Y(\Omega)$	0	1	2	3	Total
$P_{(X=3)}(Y=k)$	1/3	0	2/3	0	1

$k \in Y(\Omega)$	0	1	2	3	Total
$P_{(X=2)}(Y=k)$	0,5	0	0	0,5	1

5. Lois marginales de X et Y .

$X \setminus Y$	0	1	2	3	Loi de X
1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5
2	0,1	0	0	0,1	0,2
3	0,1	0	0,2	0	0,3
Loi de Y	0,3	0,2	0,3	0,2	1

Loi de U . On a $U(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$.

- $P(U = 9) = P(X = 3, Y = 3) = 0$;
- $P(U = 0) = P(Y = 0) = 0, 3$;
- $P(U = 1) = P(X = 1, Y = 1) = 0, 2$;
- $P(U = 2) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = 0 + 0, 1 = 0, 1$;
- $P(U = 3) = P(X = 1, Y = 3) + P(X = 3, Y = 1) = 0, 1 + 0 = 0, 1$;
- $P(U = 4) = P(X = 2, Y = 2) = 0$;
- $P(U = 6) = P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2) = 0, 1 + 0, 2 = 0, 3$.

Vérif $\sum_{k \in U(\Omega)} P(U = k) = 1$ OK.

Loi de V . On a $V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

- $P(V = 3) = P(X = 3, Y = 3) = 0$;
- $P(V = 0) = P(Y = 0) = 0, 3$;
- $P(V = 2) = P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2) = 0 + 0, 1 + 0, 2 = 0, 3$;
- $P(V = 1) = 1 - [P(V = 0) + P(V = 2) + P(V = 3)] = 1 - 0, 6 = 0, 4$.

Exercice 7. Démarchage téléphonique - Binomiale, somme de v.a.. Un commercial tente de joindre par téléphone n clients par n appels (un appel par client). Pour chaque appel, il a une probabilité p de joindre son client. Les appels sont indépendants. On note $q := 1 - p$.

1. On note X le nombre de clients que le commercial a réussi à joindre. Déterminer la loi de X , son espérance, sa variance.
2. Le commercial tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ clients qu'il n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de clients joints au deuxième essai. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.
3. Montrer que pour tout $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, l \rrbracket$, $\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l} \binom{l}{k}$.
4. On note $Z = X + Y$ le nombre de clients joints en tout.

(a) Montrer que pour tout $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(Z = l) = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.

(b) Quelle loi connue suit Z ?

Correction.

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès (joindre un client, de probabilité p) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes (les appels sont indépendants)

de paramètre p . D'après le cours, X suit une loi binomiale de paramètres n et p : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et donc $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Remarquons tout d'abord que si l'évènement $\{X = k\}$ est réalisé (c'est-à-dire k personnes ont été jointes lors du premier appel), alors la variable aléatoire Y représente le nombre de clients joints au deuxième appel et elle prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n-k \rrbracket$. La probabilité de joindre un client est toujours p et les appels sont indépendants donc, sachant $\{X = k\}$, on peut voir Y comme la somme de $n-k$ variables aléatoires, identiques et indépendantes, qui suivent des lois de Bernoulli de paramètre p . Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$ est une loi binomiale de paramètres $n-k$ et p . Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 0, n-k \rrbracket, P_{\{X=k\}}(Y=i) = \binom{n-k}{i} p^i q^{n-k-i}.$$

3. On a déjà donné plusieurs preuves de cette égalité. Soient $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, l \rrbracket$.
En voici une (calculatoire). D'une part,

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$$

et d'autre part,

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!},$$

donc on a bien l'égalité : $\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l} \binom{l}{k}$.

En voici une autre (combinatoire). Il y a deux manières de compter les l personnes jointes au bout des deux appels dont k sont jointes au premier appel :

- soit, on choisit les k personnes parmi n jointes au premier tour, puis les $l-k$ personnes (parmi les $n-k$ personnes appelées au deuxième tour) jointes au deuxième appel : il y a donc $\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$ façons de faire ;
- soit, on choisit les l personnes parmi les n jointes au bout des deux appels, et parmi elles, celles qui seront jointes dès le premier appel : il y a donc $\binom{n}{l} \binom{l}{k}$ façons de faire.

Par unicité du cardinal, on a $\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l} \binom{l}{k}$.

4. On note $Z = X + Y$ le nombre de clients joints en tout. Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

(a) Soit $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Puisque $(\{X = k\})_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'évènements, on sait grâce

à la formule des probabilités totales que

$$\begin{aligned}
 P(Z = l) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, X + Y = l) \\
 &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = l - k) \\
 &= \sum_{k=0}^l P(X = k, Y = l - k) + \underbrace{\sum_{k=l+1}^n P(X = k, Y = l - k)}_{=0} \\
 &= \sum_{k=0}^l P(X = k, Y = l - k) \\
 &= \sum_{k=0}^l P_{\{X=k\}}(Y = l - k)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^l \binom{n-k}{l-k} p^{l-k} q^{n-k-(l-k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{car } Y|X = k \sim \mathcal{B}(n-k, p) \\
 &= \sum_{k=0}^l \binom{n-k}{l-k} \binom{n}{k} p^l q^{2n-l-k} \\
 &= \sum_{k=0}^l \binom{n}{l} \binom{l}{k} p^l q^{2n-l-k} \quad \text{(question 3.)} \\
 &= \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} q^{l-k} \\
 &= \binom{n}{l} p^l (q^2)^{n-l} (1+q)^l \quad \text{(binôme de Newton)} \\
 \underline{P(Z = l)} &= \underline{\binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}}.
 \end{aligned}$$

(b) On a $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1 - q^2$ donc $\forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(Z = l) = \binom{n}{l} (1 - q^2)^l (q^2)^{n-l}$ et

Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi, $\boxed{Z \sim \mathcal{B}(n, 1 - q^2)}$.

Exercice 8. Échange entre 2 urnes. On dispose de deux boîtes A et B , de deux boules noires et de deux boules rouges. Au départ, chaque urne contient deux des quatre boules. À chaque étape, on tire une boule de chacune des boîtes et on les échange.

Soit X_0 le nombre de boules noires placées initialement dans A et X_n le nombre de boules noires dans A après n étapes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = P(X_n = 0), \quad q_n = P(X_n = 1) \quad \text{et} \quad r_n = P(X_n = 2).$$

1. Déterminer la loi de X_0 si, au départ, les boules sont placées au hasard dans les deux boîtes. Dans la suite, X_0 est quelconque.

$$2. \text{ Montrer qu'il existe } M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ Montrer que la matrice } M \text{ est semblable à } D = \text{Diag} \left(1, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

Expliciter une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$.

$$4. \text{ On pose } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

Exprimer p_n , q_n et r_n en fonction de a , b , c et n .

En déduire que les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Déterminer leurs limites respectives p , q et r (on pourra remarquer que $p + q + r = 1$).

Commenter.

Correction.

1. On choisit deux boules parmi quatre que l'on place dans la boîte A , les deux autres boules étant placées dans la boîte B . Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

On obtient $p_0 = \frac{1}{6}$ (il faut placer les deux boules rouges dans A : il y a un cas favorable) et de même $r_0 = \frac{1}{6}$. On en déduit $q_0 = 1 - p_0 - r_0 = \frac{2}{3}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{X_n = 0\}, \{X_n = 1\}, \{X_n = 2\})$. On obtient :

$$p_{n+1} = p_n P_{\{X_n=0\}}(X_{n+1} = 0) + q_n P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1} = 0) + r_n P_{\{X_n=2\}}(X_{n+1} = 0).$$

On a :

- $P_{\{X_n=0\}}(X_{n+1} = 0)$ et $P_{\{X_n=2\}}(X_{n+1} = 0)$ valent 0, car si la boîte A contient 0 ou 2 boules noires, elle en contiendra une après échange ;
- $P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$, car si la boîte A contient une boule noire, il faut échanger cette boule noire avec la boule rouge de l'autre boîte.

Ainsi $p_{n+1} = \frac{1}{4}q_n$. En raisonnant de la même façon, on obtient :

$$q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2}q_n + r_n \quad \text{et} \quad r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n.$$

La matrice M cherchée est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M . On cherche une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de u est D , c'est-à-dire vérifiant :

$$u(e_1) = e_1, \quad u(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -\frac{1}{2}e_3.$$

En résolvant $MX = X$, où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on voit que $e_1 = (1, 4, 1)$ convient.

On trouve de même $e_2 = (1, 0, -1)$ et $e_3 = (1, -2, 1)$.

On montre facilement que (e_1, e_2, e_3) est libre (en revenant à la définition et en appliquant u par exemple) de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de u dans cette base est D .

On a donc $M = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En notant Y_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, on a $Y_{n+1} = MY_n$.

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = M^n Y_0 = PD^n P^{-1} Y_0.$$

On a $P^{-1}Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On obtient, après calcul :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = Y_n = P \text{Diag}(1, 0, (-1/2)^n) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (-1/2)^n c \\ 4a - 2(-1/2)^n c \\ a + (-1/2)^n c \end{pmatrix}.$$

Les suites (p_n) , (q_n) et (r_n) convergent respectivement vers a , $4a$ et a .

De plus, $p_n + q_n + r_n = 1$ (car $(\{X_n = 0\}, \{X_n = 1\}, \{X_n = 2\})$ est un système complet d'événements).

Par passage à la limite, on obtient $a + 4a + a = 1$ et donc $a = \frac{1}{6}$.

On a donc $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{2}{3}$ et $r = \frac{1}{6}$.

On voit que, lorsque n tend vers $+\infty$, la loi de X_n tend vers la loi obtenue quand on place les boules au hasard dans les deux boîtes.

Détermination de loi, calcul d'espérance, covariance et de variance

Exercice 9. Calcul d'espérance. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et que $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \frac{a^X}{2^n}$.

Correction.

1. Grâce à la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^\ell (1-p)^{n+1-\ell} \\
 &= \frac{1}{p(n+1)} \left[(p + (1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right] \\
 &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}}.$$

2. Grâce à la formule de transfert : $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{(a+1)^n}{n2^{n+1}}$, en reconnaissant la formule

du binôme de Newton. Donc $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{(a+1)^n}{n2^{n+1}}}$.

Exercice 10. Rang d'apparition de la première blanche (sans remise). Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ rouges. On effectue des tirages sans remise.

Soient X la variable aléatoire égale au rang de sortie de la première boule blanche et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Donner une relation entre X et Y .
3. En déduire la loi de Y et son espérance.

Correction.

1. ▷ Loi de X .

On trouve $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, et même si l'on veut $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Soit $k \in X(\Omega)$. L'évènement

$$[X = k] = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k,$$

où R_i est l'évènement « tirer une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage » et B_i « tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

En utilisant la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1}. \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve :

$$\boxed{\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}}.$$

Remarque : pour $k = n$, on trouve une probabilité nulle comme attendu (pourquoi « comme attendu » ?).

Autre solution. On peut aussi raisonner en dénombrant.

Prenons pour Ω l'ensemble des n -arrangements de $\{B_1, B_2, R_1, \dots, R_{n-2}\}$ muni de la probabilité uniforme. Le cardinal de Ω vaut $n!$.

Soit $k \in X(\Omega)$. Un tirage réalisant l'évènement $[X = k]$ est du type :

$$(R_\star, \dots, R_\star, B_\star, \text{ce-qui-reste})$$

Se donner un tel tirage revient à

- choisir les $k - 1$ boules rouges et les permuter : $\binom{n-2}{k-1} \times (k-1)! = \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}$
- choisir une des deux boules blanches en $k^{\text{ème}}$ position : 2 choix
- choisir un $(n - k)$ -arrangement des $n - k$ boules restantes : $(n - k)!$ choix,

d'où

$$P(X = k) = \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!} \times 2 \times (n-k)! = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

▷ **Espérance de X .**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right) = \dots = \boxed{\frac{n+1}{3}}.$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Lorsque l'on a tiré la première blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage, il reste $(n-2) - (k-1) = n-k-1$ rouges dans l'urne ; et réciproquement.

Ainsi, on a l'égalité d'événements :

$$\boxed{[X = k] = [Y = n - k - 1]}.$$

On en déduit l'égalité de **variables aléatoires** :

$$Y = n - X - 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{Y = (-1)X + (n-1)}.$$

3. ▷ **Loi de Y .**

- Déterminons l'univers image de Y .

Comme la variable aléatoire Y est la transformée de la variable aléatoire X par la fonction $t \mapsto -t + (n-1)$, il suffit de regarder l'image de $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ par cette fonction.

Ainsi $\boxed{Y(\Omega) \subset \llbracket -1, n-2 \rrbracket}$.

- Comme $Y = (-1)X + (n-1)$, on a également X en fonction de Y ; en effet $X = (n-1) - Y$. Ainsi, pour $y \in Y(\Omega)$, on a l'égalité d'événements :

$$[Y = y] = [X = n - 1 - y]$$

Comme on connaît la loi de X , on en déduit la loi de Y ; en effet, on a

$$\boxed{P(Y = y) = \frac{2(n - (n-1-y))}{n(n-1)} = \frac{2(y+1)}{n(n-1)}}.$$

▷ **Espérance de Y .**

Une mauvaise stratégie consiste à refaire tout un calcul pour $\mathbb{E}(Y)$.

Il est bien mieux de profiter du fait que Y est la transformée de X par une fonction affine. Ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = -\mathbb{E}(X) + (n-1)$$

Après petit calcul, on trouve

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{2n-4}{3}}.$$

Exercice 11. Minimum de deux uniformes indépendantes. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Démontrer le lemme suivant :

Lemme. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(U \geq \ell) = \frac{n - \ell + 1}{n}.$$

Cette égalité est également valable pour $\ell = n + 1$.

2. Déterminer la loi de Z , puis déterminer son espérance.

3. Recommencer tout l'exercice en utilisant l'exercice 3.

Correction. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a

$$P(U \geq \ell) = \sum_{i=\ell}^n \frac{1}{n} = \frac{n - \ell + 1}{n}.$$

Cette égalité est encore valable pour $\ell = n + 1$. En effet, pour $\ell = n + 1$, on doit avoir $P(Z \geq \ell) = 0$. Et le membre droit donne bien 0.

2. Déterminons la loi de $Z = \min(X, Y)$.

On a $Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a, par définition du minimum,

$$[Z \geq k] = [X \geq k] \cap [Y \geq k].$$

Par indépendance de X et Y et en utilisant le lemme, on a alors

$$P(Z \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) = \left(\frac{n - k + 1}{n}\right)^2.$$

Il s'agit maintenant de revenir à $P(Z = k)$.

Comme Z est à valeurs entières, on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad P(Z = \ell) = P(Z \geq \ell) - P(Z \geq \ell + 1).$$

WARNING. La formule $P(Z \geq k)$ trouvée précédemment n'est pas valable pour tous les $k \in \mathbb{Z}$. Elle ne fonctionne, **a priori**, que pour les $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Or, on constate que la formule fonctionne également pour $k = n + 1$.

On obtient donc

$$P(Z = k) = \left(\frac{n - k + 1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n - (k + 1) + 1}{n}\right)^2 = \frac{(n - k + 1)^2 - (n - k)^2}{n^2} = \frac{2n + 1 - 2k}{n^2}.$$

BILAN :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z = k) = \frac{2n + 1 - 2k}{n^2}.$$

- On peut maintenant déterminer l'espérance de Z . On a

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^n kP(Z=k) = \dots = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

3. Déterminons l'espérance de Z uniquement avec $P(Z \geq k)$.

D'après la formule rappelée (que l'on peut appliquer car Z est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc dans $\llbracket 0, n \rrbracket$), on a :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k^2 - 2(n+1)k + (n+1)^2) = \dots = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Remarque. Ce calcul est très maladroit. On peut faire (il faut faire !) un changement d'indice dans la première somme en posant $j = n+1-k$.

Exercice 12. Poignée. Une urne contient n jetons ($n \geq 2$), numérotés de 1 à n . On tire une poignée de jetons (i.e. une partie, éventuellement vide, de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés, et S la somme des numéros des jetons tirés. Enfin, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le i -ème jeton est dans la poignée et 0 sinon. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.

1. Déterminer la loi de N , son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
3. Montrer que les variables $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux indépendantes.
4. Exprimer S en fonction des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

Correction. Un élément de Ω est une partie de l'ensemble des n jetons. On a donc $\text{Card}(\Omega) = 2^n$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

1. On a $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(N=k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

Ainsi N suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{E}(N) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{n}{4}$.

2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $P(X_i = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$, car il y a 2^{n-1} poignées contenant le jeton i (en effet, une telle poignée est constituée du jeton i et d'une partie quelconque de l'ensemble des $n-1$ jetons restants). Ainsi, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{4}$.

3. Soit $i \neq j$. On a $P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$, car il y a 2^{n-2} poignées contenant les jetons i et j (il s'agit de choisir une partie quelconque de l'ensemble des $n-2$ jetons différents des jetons i et j). On en déduit

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{4} = P(X_i = 1)P(X_j = 1).$$

Ainsi, les événements $\{X_i = 1\}$ et $\{X_j = 1\}$ sont indépendants.

Puisque X_i et X_j suivent des lois de Bernoulli, on a $\overline{\{X_j = 1\}} = \{X_j = 0\}$, donc $\{X_i = 1\}$ et $\{X_j = 0\}$ sont encore indépendants, $\{X_i = 0\}$ et $\{X_j = 1\}$ aussi et $\{X_i = 0\}$ et $\{X_j = 0\}$ aussi (on utilise, pour A et B deux évènements de Ω , $A \perp\!\!\!\perp B \implies \overline{A} \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$).

Cela montre l'indépendance de X_i et X_j , cela pour tout $i \neq j$.

4. • On a clairement
$$S = \sum_{i=1}^n iX_i.$$

• Par linéarité de l'espérance, on en déduit
$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^n i\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{4}.$$

• Comme les variables X_i sont deux à deux indépendantes, les variables iX_i le sont aussi (cf $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$), donc on a :

$$\mathbb{V}(S) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(iX_i) = \sum_{i=1}^n i^2 \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

Sinon, on peut écrire

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n iX_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(iX_i) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \underbrace{\text{Cov}(X_i, X_j)}_{=0 \text{ car } X_i \perp\!\!\!\perp X_j} = \sum_{i=1}^n i^2 \mathbb{V}(X_i) = \dots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

Exercice 13. Gain. On dispose d'une boîte contenant trois objets A, B, C . Un jeu consiste en une succession de tirages d'un objet avec remise dans la boîte.

À chaque tirage, le joueur gagne 1 euro s'il tire l'objet A , ne gagne ni ne perd rien s'il tire l'objet B , et perd tout ce qu'il a gagné précédemment s'il tire l'objet C .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue de n tirages.

- Déterminer les lois de X_0 , X_1 et X_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(X_n = n)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $P(X_n = 0)$. En déduire la valeur de $P(X_n = 0)$.
- Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que

$$P(X_{n+1} = a) = \frac{1}{3}P(X_n = a) + \frac{1}{3}P(X_n = a - 1).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n .

Correction. On va noter A_i l'évènement « tirer l'objet A au $i^{\text{ème}}$ tirage ». De même, on définit B_i et C_i .

- On peut raisonnablement penser que X_0 est la variable aléatoire constante égale à 0 (avant de jouer, on dispose d'un gain égal à 0).
- On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.

L'évènement $[X_1 = 1]$ est « tirer A », donc $P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$.

Ainsi, $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

• On a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

On a l'égalité d'évènement $[X_2 = 2] = A_1 \cap A_2$.

On peut considérer les tirages indépendants, donc $P(X_2 = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

On a l'égalité d'évènement $[X_2 = 1] = (A_1 \cap B_2) \sqcup (\overline{A_1} \cap A_2)$.

Ainsi, par additivité de P, puis par indépendance de A_1 et B_2 d'une part et $\overline{A_1}$ et A_2 d'autre part, on a

$$P(X_2 = 1) = P(A_1 \cap B_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1)P(B_2) + P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{On a donc } P(X_2 = 0) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 2) = \frac{9}{9} - \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

2. On a l'égalité d'évènements

$$[X_n = n] = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

Par indépendance des A_i , on a

$$P(X_n = n) = \prod_{i=1}^n P(A_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{3} = \frac{1}{3^n}.$$

3. On a l'égalité d'évènements

$$[X_{n+1} = 0] = [X_n = 0] \cap \overline{A_{n+1}} \sqcup [\overline{X_n = 0}] \cap C_{n+1}.$$

Par additivité de P et indépendance, on a

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)(1 - P(A_{n+1})) + (1 - P(X_n = 0))P(C_{n+1}).$$

Notons $u_n = P(X_n = 0)$. On a la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{2}{3} + (1 - u_n) \times \frac{1}{3},$$

d'où $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique de premier terme $u_0 =$

1.

En posant $\gamma = \frac{1}{2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, par différence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \gamma = \frac{1}{3}(u_n - \gamma).$$

La suite $(u_n - \gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et premier terme $u_0 - \gamma$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \gamma = \frac{1}{3^n}(u_0 - \gamma) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + 1\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + 1\right)}.$$

4. Comme $a \neq 0$, on a l'égalité d'événements

$$[X_{n+1} = a] = [X_n = a] \cap B_{n+1} \sqcup [X_n = a - 1] \cap A_{n+1}.$$

Par additivité de P et indépendance, on a

$$\boxed{P(X_{n+1} = a) = \frac{1}{3}P(X_n = a) + \frac{1}{3}P(X_n = a - 1)}.$$

5. On a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{a \in X_{n+1}(\Omega)} aP(X_{n+1} = a) = \sum_{a=1}^{n+1} aP(X_{n+1} = a),$$

car le terme de la somme pour $a = 0$ est nul.

Avec la relation de récurrence de la question précédente (valable pour $a \neq 0$) et en utilisant le fait que X_n ne prend pas la valeur $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \frac{1}{3} \sum_{a=1}^n aP(X_n = a) + \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{n+1} aP(X_n = a - 1) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{a=1}^n aP(X_n = a) + \frac{1}{3} \sum_{b=0}^n (b+1)P(X_n = b) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{a=1}^n aP(X_n = a) + \frac{1}{3} \sum_{b=0}^n bP(X_n = b) + \underbrace{\frac{1}{3} \sum_{b=0}^n P(X_n = b)}_{=1} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{a=1}^n aP(X_n = a) + \frac{1}{3} \\ \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.

En posant $e_n = \mathbb{E}(X_n)$ et $\gamma = 1$, on observe, comme précédemment, que la suite $(e_n - \gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est

géométrique, de raison $\frac{2}{3}$ et premier terme $e_0 - \gamma$, avec $e_0 = \mathbb{E}(X_0) = 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n - \gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^n (e_0 - \gamma) \quad \text{c'est-à-dire} \quad e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (0 - 1) + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.}$$

Exercice 14. Rang d'apparition du premier pile en n lancers. Soit $n \geq 2$ fixé une fois pour toutes.

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant pile avec la probabilité p .

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- si on a obtenu pile
- si on a obtenu n fois face

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k l'évènement « obtenir face au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On note :

- T_n la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués ;
- X_n le nombre de pile obtenus ;
- Y_n le nombre de face obtenus.

- (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer $P(T_n = k)$.
 (b) Déterminer $P(T_n = n)$.
 (c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$.
 (d) Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

2. Donner la loi de X_n et donner son espérance.

3. Déterminer la loi de Y_n .

Correction.

- (a) Comme $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, le jeu s'arrête au premier pile obtenu, on a l'égalité d'évènements :

$$[T_n = k] = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}.$$

En appliquant P , on a :

$$\begin{aligned} P(T_n = k) &= P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}) \\ &= P(F_1)P(F_2) \cdots P(F_{k-1})P(\overline{F_k}) \quad \text{par indépendance des } F_i \\ &= \boxed{q^{k-1}p}. \end{aligned}$$

(b) On a l'égalité d'événements

$$[T_n = n] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1}.$$

En utilisant la même technique qu'à la question précédente, on trouve $\boxed{P(T_n = n) = q^{n-1}}$.

(c) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p + q^{n-1} \\ &= pq^{1-1} \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(d) La variable aléatoire T_n admet une espérance en tant que variable aléatoire finie.

Après avoir écrit la définition de $\mathbb{E}(T_n)$, on constate que l'on ne peut pas faire grand chose dans le calcul.

Une idée est donc de montrer que $(1 - q)\mathbb{E}(T_n) = 1 - q^n$.

$$\begin{aligned} (1 - q)\mathbb{E}(T_n) &= (1 - q) \left(\sum_{k=1}^{n-1} kP(T_n = k) + nP(T_n = n) \right) \\ &= (1 - q) \sum_{k=1}^{n-1} k \underbrace{P(T_n = k)}_{q^{k-1}p} + n \underbrace{(1 - q)}_p \underbrace{P(T_n = n)}_{q^{n-1}} \\ &= p \sum_{k=1}^{n-1} (kq^{k-1} - kq^k) + npq^{n-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{n-1} [(k-1) + 1]q^{k-1} - kq^k + npq^{n-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{n-1} [(k-1)q^{k-1} - kq^k] + p \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + npq^{n-1} \\ &= -(n-1)pq^{n-1} + p \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + npq^{n-1} \\ &= pq^{n-1} + (1 - q^{n-1}) \\ &= 1 - q^{n-1}(1 - p) \\ &= 1 - q^{n-1}q \\ &= 1 - q^n, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

2. Le nombre de pile obtenu est soit 0, soit 1, donc $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$.

Ainsi, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_n = 1)$.

On a l'égalité d'événements

$$[X_n = 0] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n.$$

Par indépendance, on a donc $P(X_n = 0) = q^n$.

Ainsi,

$$X_n \sim \mathcal{B}(1 - q^n).$$

On a alors $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

3. Le nombre de face obtenu est 0, 1, ... ou n , donc $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Fixons $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Pour $k = n$, on a $[Y_n = n] = F_1 \cap \dots \cap F_n$. D'où $P(Y_n = n) = q^n$.
- Pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a $[Y_n = k] = F_1 \cap \dots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}$, d'où

$$P(Y_n = k) = P(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}) = q^k p.$$

Ainsi, $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, P(Y_n = k) = q^k p$.

Solution se voulant savante, mais qui n'apporte rien. Je la laisse quand même car elle est instructive.

On a l'égalité de variable aléatoire suivante : $X_n + Y_n = T_n$, qui traduit le fait que le nombre de pile plus le nombre de face vaut le nombre de lancers. Ainsi, $Y_n = T_n - X_n$.

Comme $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, on a

$$Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Fixons $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a l'égalité d'événements

$$[Y_n = k] = [T_n = k] \cap [X_n = 0] \sqcup [T_n = k + 1] \cap [X_n = 1].$$

- Pour $k = n$, elle s'écrit

$$[Y_n = n] = \underbrace{[T_n = n] \cap [X_n = 0]}_{F_1 \cap \dots \cap F_n} \sqcup \underbrace{[T_n = n + 1] \cap [X_n = 1]}_{\emptyset}$$

D'où $P(Y_n = n) = P(F_1 \cap \dots \cap F_n) = q^n$.

- Et pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a

$$[Y_n = k] = \underbrace{[T_n = k] \cap [X_n = 0]}_{\emptyset} \sqcup \underbrace{[T_n = k + 1] \cap [X_n = 1]}_{F_1 \cap \dots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}}$$

On a donc

$$P(Y_n = k) = P(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}) = q^k p$$

Exercice 15. Tirages dans des urnes aléatoires. Soit un entier $n \geq 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . Dans l'urne k , il y a k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et dans celle-ci, on pioche une boule au hasard. Soient X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la covariance de X et de Y .

Correction.

- La variable X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
- La variable Y est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de Y sachant $\{X = k\}$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$. Pour $(k, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a donc :

$$P(\{X = k\} \cap \{Y = i\}) = P(X = k)P(Y = i|X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k, \\ \frac{1}{nk} & \text{si } i \leq k. \end{cases}$$

Grâce à la formule des probabilités totales, on en déduit que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^n P(X = k, Y = i) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{nk}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=1}^n iP(Y = i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{i}{nk} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{nk} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{i}{nk} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2nk} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{2n} \frac{n(n+3)}{2} \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

- On calcule ensuite l'espérance de XY :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k kiP(\{X = k\} \cap \{Y = i\}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k ki \frac{1}{nk} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k i \right),$$

et donc :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{12n} (2n+1+3) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

- On en déduit :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n+1)(n+3)}{8} = \frac{(n+1)(n-1)}{24} = \frac{n^2-1}{24}.$$

Exercice 16. Boules blanches, noires et rouges. Une urne contient des boules blanches, noires et rouges, la proportion de boules blanches (resp. noires, resp. rouges) étant p_1 (resp. p_2 , resp. p_3). On extrait n boules de l'urne, avec remise. On note X (resp. Y , resp. Z) le nombre de boules blanches (resp. noires, resp. rouges) obtenues. Déterminer la covariance de X et Y .

Correction. On remarque que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et $X + Y + Z = n$. Les variables X , Y , Z suivent des lois binomiales de paramètres (n, p_1) , (n, p_2) , (n, p_3) respectivement. On obtient ainsi : $\mathbb{V}(X) = np_1(1 - p_1)$, $\mathbb{V}(Y) = np_2(1 - p_2)$, $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(n - Z) = \mathbb{V}(Z) = np_3(1 - p_3)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2} (\mathbb{V}(X + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)) \\ &= \frac{n}{2} (p_3(1 - p_3) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2)) \\ &= \frac{n}{2} ((1 - (p_1 + p_2))(p_1 + p_2) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2)) \quad \text{car } p_3 = 1 - (p_1 + p_2) \text{ et } 1 - p_3 = p_1 + p_2 \\ &= \frac{n}{2} [(p_1 + p_2) - (p_1 + p_2)^2 - (p_1 + p_2) + (p_1^2 + p_2^2)] \\ &= \frac{n}{2} [-2p_1p_2] \\ &= -np_1p_2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Cov}(X, Y) = -np_1p_2}$.

Exercice 17. Nombre de piles. On considère une suite de N lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note S_n le nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers. Calculer la covariance de (S_m, S_n) pour m et n dans $\llbracket 1, N \rrbracket$.

Correction. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on considère la variable X_i qui vaut 1 si le i -ème lancer donne pile et 0 sinon. On obtient des variables indépendantes $X_1, \dots, X_N$. Pour m et n dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, on a $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$

et $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. **Méthode 1.** En utilisant la bilinéarité de la covariance, on obtient :

$$\text{Cov}(S_m, S_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Si $i \neq j$, la covariance de X_i et X_j est nulle car ces variables sont indépendantes. Les termes non nuls de la somme sont les $\text{Cov}(X_i, X_i)$ avec $i \leq m$ et $i \leq n$, c'est-à-dire $i \leq \min(m, n)$.

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $\text{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) = p(1 - p)$. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\text{Cov}(S_m, S_n) = \sum_{i=1}^{\min(m, n)} \mathbb{V}(X_i) = \min(m, n)p(1 - p)}.$$

Méthode 2. Sans perte de généralité, supposons que $m \geq n$.

On écrit alors : $S_m = S_n + R_m$ où R_m est la somme de piles entre le $n + 1$ -ème et le m -ème lancer. Les

lancers étant indépendants, on a $S_n \perp\!\!\!\perp R_m$ (attention, R_m n'est pas indépendant de S_m). Donc

$$\text{Cov}(S_n, S_m) = \text{Cov}(S_n, S_n + R_m) = \mathbb{V}(S_n) + \underbrace{\text{Cov}(S_n, R_m)}_{=0 \text{ par indépendance}} = np(1-p),$$

car $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Finalement,

$$\boxed{\text{Cov}(S_m, S_n) = \min(m, n)p(1-p)}.$$

Exercice 18. Tirages de boules par numéros croissants. Une urne contient n boules indiscernables numérotées de 1 à n , que l'on tire successivement, sans remise. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note u_i le numéro de la i -ème boule tirée. On considère la variable aléatoire X_n qui à tout tirage fait correspondre le plus grand entier naturel k tel que $u_1 < u_2 < \dots < u_k$.

1. Préciser l'univers Ω et $X_n(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, calculer $P(X_n \geq k)$. En déduire la loi de la variable aléatoire X_n .
3. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Correction.

1. L'univers Ω est l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\text{Card}(\Omega) = n!$.

On munit Ω de la probabilité uniforme P . On a $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- L'évènement $\{X_n \geq k\}$ est réalisé si $u_1 < \dots < u_k$.

Le nombre de suites strictement croissantes de k réels que l'on peut obtenir dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est

$$\binom{n}{k}.$$

Les $n - k$ éléments restants pouvant être tirées dans un ordre quelconque, on obtient :

$$\text{Card}(\{X_n \geq k\}) = \binom{n}{k}(n - k)! = \frac{n!}{k!} \quad \text{et} \quad \boxed{P(X_n \geq k) = \frac{1}{k!}}.$$

- On en déduit :

$$\boxed{P(X_n = k) = P(X_n \geq k) - P(X_n \geq k + 1) = \begin{cases} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} & \text{si } k < n \\ \frac{1}{n!} & \text{si } k = n. \end{cases}},$$

car $P(X \geq n + 1) = 0$.

3. D'après l'exercice 3, $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n P(X_n \geq k)$. On obtient alors : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}}$.

$$\boxed{\text{Or, } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e}, \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = e - 1}.$$

Exercice 19. Urne de Pólya. Soient r , b et c trois entiers naturels non nuls. L'urne U contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On pose $N = r + b$. On tire les boules de U une à une ; à l'issue de chaque tirage, la boule prélevée dans l'urne est remise, avec c boules de la même couleur. Pour $n \geq 1$, on note X_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages, Y_n la variable indicatrice de l'évènement « le n -ième tirage donne une boule rouge ».

1. Déterminer la loi de Y_1 et son espérance.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \frac{r + c \mathbb{E}(X_n)}{N + nc}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer X_n à l'aide des variables $Y_1, \dots, Y_n$ et en déduire que toutes les variables $Y_1, \dots, Y_n$ ont même loi.
4. Déterminer l'espérance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction.

1. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage est $\frac{r}{N}$, donc $\boxed{Y_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{r}{N}\right)}$ et $\boxed{\mathbb{E}(Y_1) = \frac{r}{N}}$.
2. L'ensemble des valeurs prises par X_n est $\llbracket 0, n \rrbracket$. On prend comme système complet d'évènements la famille $(\{X_n = k\})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. La variable aléatoire Y_{n+1} étant une variable indicatrice, on a :

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 | X_n = k).$$

Si $X_n = k$, on a rajouté ck boules rouges dans l'urne et cn boules en tout donc $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 | X_n = k) = \frac{r + ck}{N + cn}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) \frac{r + ck}{N + cn} \\ &= \frac{r}{N + cn} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{c}{N + cn} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) k \\ &= \frac{r}{N + cn} \times 1 + \frac{c}{N + cn} \mathbb{E}(X_n) \\ \underline{\underline{\mathbb{E}(Y_{n+1})}} &= \underline{\underline{\frac{r + c\mathbb{E}(X_n)}{N + cn}}}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a clairement

$$X_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad (*)$$

- En tant qu'indicatrice, il est clair que $Y_m(\Omega) = \{0, 1\}$ donc les variables aléatoires Y_m suivent des lois de Bernoulli. Il reste à vérifier que $P(Y_m = 1) = \frac{r}{N}$.

Nous allons encore utiliser que pour les variables aléatoires indicatrices, $P(Y_m = 1) = \mathbb{E}(Y_m)$.

Démontrons par **réurrence forte finie sur $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$** que $\mathbb{E}(Y_m) = \frac{r}{N}$.

- La propriété est déjà acquise pour $m = 1$.
- Soit $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ telle que la propriété est vraie **jusqu'au rang m** . Alors, d'après la question 2.,

$$\mathbb{E}(Y_{m+1}) = \frac{r + c\mathbb{E}(X_m)}{N + cm}.$$

Or, d'après (*) et par hypothèse de réurrence forte,

$$\mathbb{E}(X_m) = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^m \frac{r}{N} = \frac{mr}{N}.$$

Donc :

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \frac{r + \frac{cmr}{N}}{N + cm} = \frac{r}{N}.$$

- On a donc, pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(Y_m = 1) = \frac{r}{N}$ donc $Y_m \sim \mathcal{B}\left(\frac{r}{N}\right)$:

toutes les v.a. Y_m ont même loi.

4. D'après (*), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(Y_1) = \frac{nr}{N}$.

Exercice 20. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Soit $p \in [0, 1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite en partant de l'origine 0. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $1 - p$. On suppose que ses déplacements sont indépendants les uns des autres. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n ($X_0 = 0$) ; on note aussi D_n le nombre de déplacements vers la droite de la puce jusqu'à l'instant n .

1. Déterminer la loi de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $X_n = 2D_n - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire les lois de X_{2n} et de X_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : faire un schéma avec $n = 3$ pour comprendre ce qu'il se passe.

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $D_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On peut écrire : $D_n = \sum_{k=1}^n S_k$, où S_k est la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le déplacement à l'instant k a lieu vers la droite. Ainsi, D_n est la somme de n v.a. indépendantes qui suivent toute la loi de Bernoulli de paramètre p donc $D_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Jusqu'à l'instant n , D_n représente le nombre de déplacements vers la droite, donc $n - D_n$ représente le nombre de déplacements vers la gauche. Ainsi, $X_n = 1 \times D_n + (-1) \times (n - D_n)$

ou encore $X_n = 2D_n - n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Faire un arbre pour $n = 3$ et conjecturer que X_{2n} prend les valeurs paires dans $\llbracket -2n, 2n \rrbracket$ et X_{2n+1} prend les valeurs impaires dans $\llbracket -(2n+1), 2n+1 \rrbracket$.

• **Loi de X_{2n} .**

On sait que $X_{2n} = 2D_{2n} - 2n$ et $\text{Im}(D_{2n}) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$, donc

$$\text{Im}(X_{2n}) = \{2\ell - 2n \mid \ell \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\} = \{2(\ell - n) \mid \ell \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\} = \{2k \mid k \in \llbracket -n, n \rrbracket\}.$$

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, P(X_{2n} = 2k) = P(D_{2n} = k + n) = \binom{2n}{k+n} p^{k+n} (1-p)^{n-k} \text{ car } D_{2n} \sim \mathcal{B}(2n, p).$$

(On peut vérifier que $\sum_{k=-n}^n P(X_{2n} = 2k) = 1$, ce qui est le cas).

• **Loi de X_{2n+1} .**

On sait que $X_{2n+1} = 2D_{2n+1} - (2n+1)$ et $\text{Im}(D_{2n+1}) = \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket$, donc

$$\text{Im}(X_{2n+1}) = \{2\ell - 2n - 1 \mid \ell \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket\} = \{2(\ell - n - 1) + 1 \mid \ell \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket\} = \{2k+1 \mid k \in \llbracket -n-1, n \rrbracket\}.$$

$$\forall k \in \llbracket -n-1, n \rrbracket, P(X_{2n+1} = 2k+1) = P(D_{2n+1} = k + n + 1) = \binom{2n+1}{k+n+1} p^{k+n+1} (1-p)^{n-k}$$

car $D_{2n+1} \sim \mathcal{B}(2n+1, p)$.

(On peut vérifier que $\sum_{k=-n-1}^n P(X_{2n+1} = 2k+1) = 1$, ce qui est le cas.)

Exercice 21. Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec un ou deux bonds. Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités suivant la procédure suivante :

- au départ la puce est en O ;
- si, à un instant, la puce est au point d'abscisse k , à l'instant d'après elle sera soit au point d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit au point d'abscisse $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de S_n , son espérance et sa variance.

Chaque saut est d'une unité ou de deux unités avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Les sauts étant indépendants,

le nombre S_n de sauts de deux unités suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$.

On a donc $\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}$.

2. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n . En déduire l'espérance et la variance de X_n .

Lors des n premiers lancers, il y a par définition S_n sauts de deux unités, donc $n - S_n$ sauts d'une unité.

D'où $X_n = 2 \times S_n + 1 \times (n - S_n) = n + S_n$. On en déduit

$$\mathbb{E}(X_n) = n + \mathbb{E}(S_n) = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}.$$

3. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre minimum de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser (au cas où on ne s'y arrêterait pas) la case d'abscisse n .

(a) Déterminer les valeurs prises par Y_n .

En au plus n sauts, la puce aura atteint la case n (cas où on ne fait que des sauts d'une unité).

Il faut au moins $\frac{n}{2}$ sauts avant d'atteindre la case n (cas où on ne fait que des sauts de deux

unités). Le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$ est $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p \\ p+1 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$.

L'ensemble des valeurs prises par Y_n est donc $\left[\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \right]$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \forall k \geq 1, P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1).$$

Soient $n \geq 2$ et $k \geq 1$. On peut calculer $P(Y_n = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales avec comme système complet d'évènements « le k -ième saut est d'une unité », « le k -ième saut est de deux unités ».

Pour atteindre ou dépasser la case n au bout de k sauts, sachant que le dernier saut est d'une unité, il faut atteindre ou dépasser la case $n-1$ au bout de $k-1$ sauts.

Pour atteindre ou dépasser la case n au bout de k sauts, sachant que le dernier saut est de deux unités, il faut atteindre ou dépasser la case $n-2$ au bout de $k-1$ sauts.

On en déduit que :

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1).$$

(c) En déduire que : $\forall n \geq 2, \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$.

Soit $n \geq 2$. On écrit l'espérance de la variable Y_n sous la forme $\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^n kP(Y_n = k)$, en ajoutant certains termes nuls. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k [P(Y_{n-1} = k-1) + P(Y_{n-2} = k-1)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=-1}^{n-1} (j+1) [P(Y_{n-1} = j) + P(Y_{n-2} = j)]. \end{aligned}$$

En supprimant des termes nuls et en séparant en plusieurs sommes, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} jP(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} jP(Y_{n-2} = j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} P(Y_{n-2} = j) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2}) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.\end{aligned}$$

- (d) Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Déterminer alors u_n , puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n .

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, u_n &= \mathbb{E}(Y_n) - na \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1 - na \\ &= \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{n-1}{2a} + \frac{1}{2} u_{n-2} + \frac{n-2}{2a} + 1 - na \\ &= \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-2} + \frac{2-3a}{2}.\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux si et seulement si $2 - 3a = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a = \frac{2}{3}}$, ce que nous supposons désormais.

L'équation caractéristique est alors $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, de racines 1 et $-\frac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \lambda + \mu \left(\frac{-1}{2} \right)^n.$$

La variable aléatoire Y_1 est égale à 1, donc $\mathbb{E}(Y_1) = 1$ et $\underline{u_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$.

La variable aléatoire Y_2 suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$, donc $\mathbb{E}(Y_2) = \frac{3}{2}$ et $\underline{u_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}}$.

Des valeurs de u_1 et u_2 , on tire $\underline{\lambda = \frac{2}{9}}$ et $\underline{\mu = -\frac{2}{9}}$. Ainsi,

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \left(\frac{-1}{2} \right)^n} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{9} + \frac{2n}{3} - \frac{2}{9} \left(\frac{-1}{2} \right)^n}.$$

Probabilités et inégalités

Exercice 22. Pièces défectueuses. Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et Z_n est la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On approxime, ensuite, p par la proportion de pièces défectueuses sur cet échantillon. (On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, donc qu'il peut être considéré comme une suite de n tirages indépendants avec remise.)

1. Quelle est la loi de Z_n ? En déduire sa moyenne et sa variance.
2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que l'approximation proposée donne une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Correction.

1. La variable aléatoire Z_n compte le nombre de succès (une pièce est défectueuse, de probabilité p) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli (la pièce prélevée est défectueuse ou pas), identiques et indépendantes. Ainsi, $Z_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(Z_n) = np$ et $\mathbb{V}(Z_n) = np(1-p)$.

2. Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la majoration classique $\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Méthode 1. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\frac{Z_n}{n}$, d'espérance $\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$, et de variance $\mathbb{V}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Méthode 2. On a l'égalité d'événements *

$$\left\{\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = \{|Z_n - np| \geq n\varepsilon\}.$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire Z_n , on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|Z_n - np| \geq n\varepsilon) \leq \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0,95$.

En renversant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev obtenue à la question précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2} =: \varepsilon\right) \\ &\geq 1 - \frac{10^4}{4n}. \end{aligned}$$

Or,

$$1 - \frac{10^4}{4n} \geq 0,95 \iff n \geq 50000.$$

On en déduit que $\boxed{\text{si } n \geq 50000, \text{ alors } P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0,95}$ (condition suffisante).