- Définition de l'expo par les séries : nouveau programme de SUP
- TSSA et règle de d'Alembert : au programme de SPE

Nature de séries - terme général « concret »

Exercice 1. Nature de séries. *Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont :*

1. $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3+7}$
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$
5. $u_n = \ln(1+e^{-n})$
6. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
8. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
9. $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$
10. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$
11. $u_n = e^{-\sqrt{n^2-1}}$
12. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
13. $u_n = \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)$
14. $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$.

Correction.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$ *donc* $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

2. *Par équivalence des SATP :* $\dfrac{n+1}{n^3+7} \sim \dfrac{1}{n^2}$. *Or* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann converge donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

3. *Attention au signe du sinus !*
   Première méthode : $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$, *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum |u_n| \text{ converge i.e. } \sum u_n \text{ est absolument convergente donc } \sum u_n \text{ converge}}$.
   Deuxième méthode : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ *(donc $u_n \geq 0$ APCR) et comme* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann converge, on sait, par comparaison des SATP, que* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

4. *Remarquons que* $\cos(n) \neq 0$ *car* $n \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Ainsi la série* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *est définie à partir du rang* 1. *Pour* $n \geq 1$, *on a :*
$$0 < \cos^2(n) \leq 1 \quad \text{donc } 0 < n\cos^2(n) \leq n \quad \text{puis } u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$
   Or, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *est une série de Riemann divergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} u_n \text{ diverge}}$.

5. *Par équivalence des STAP, on a :* $\ln(1+e^{-n}) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. *Or,* $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ *donc* $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ *est une série géométrique convergente, puis par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$ *donc* $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

7. $n^{3/2}u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ *donc* $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. *Or* $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série de Riemann convergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

8. *Par croissance comparée, on montre que* $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *De plus, la SATP* $\frac{1}{n^2}$ *converge, donc la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente donc convergente.*
Sinon : $\frac{u_n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to 0$ *(par croissance comparée) donc* $u_n = o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$. *Or,* $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *est une série géométrique convergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

9. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln x \leq x-1 < x$ *donc* $\forall n \geq 2,\ \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} > 0$. *Or,* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum \frac{1}{\ln n} \text{ diverge aussi}}$.

10. *On a :* $n + (-1)^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. *La conservation du signe dans les équivalents permet d'en déduire* $n+(-1)^n\sqrt{n} \geq 0$ *APCR donc* $\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ *d'où* $u_n \sim \frac{1}{n^{1/2}}$. *Or,* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ *est une série de Riemann divergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.

11. *Par croissance comparée :* $n^2 u_n = n^2 e^{-\sqrt{n^2-1}} \to 0$. *Donc* $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *Or,* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.
Autre méthode. *On conjecture que* $u_n \sim e^{-n}$ *et on le montre "à la main". On a :*
$$\frac{u_n}{e^{-n}} = \frac{e^{-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}}{e^{-n}} = e^{-n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right)}.$$
Or, $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{-1}{2n^2}$ *donc* $-n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right) \sim \frac{1}{2n} \to 0$. *Donc* $-n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right) \to 0$ *et par continuité de l'exponentielle en 0,* $\frac{u_n}{e^{-n}} \to 1$, *ce qui signifie* $\boxed{u_n \sim e^{-n}}$.
Comme $\sum e^{-n}$ *est une série convergente (géométrique de raison* e^{-1} *avec* $|e^{-1}| \leq 1$*), on sait par théorème de comparaison des SATP que la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

12. *En multipliant par la quantité conjuguée, il vient :* $u_n = \dfrac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.
    On peut alors voir que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ *ou bien que* $u_n \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}$.
    Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série de Riemann convergente, on conclut dans tous les cas que,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

13. $\cos x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1^-$ *donc APCR* $u_n = \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right) \leq 0$ *et on peut utiliser les théorèmes de comparaison.*
    Plus précisément :
$$u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \leq 0 \text{ APCR.}$$

    > *On voit aussi ici que* $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *et on sait que* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une SATP convergente donc* $\sum u_n$ *est ACV donc convergente.*

    Ainsi, $-u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$. *Or,* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente donc par comparaison des SATP,* $\underline{\sum(-u_n) \text{ converge}}$ *d'où* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

14. $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}\left(e^{\frac{1}{n}(\ln(n+1)-\ln(n))} - 1\right) = e^{\frac{1}{n}\ln n}\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - 1\right)$.
    Or, $\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ *donc tend vers 0 et* $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ *donc*
$$u_n = \underbrace{e^{\frac{1}{n}\ln n}}_{\sim 1}\underbrace{\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - 1\right)}_{\sim\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n^2}.$$

    Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

Exercice 2. Très détaillé. *On pose* $u_n = e^{-n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Soit* $\alpha \leq 0$. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *est divergente.*
2. *Soit* $\alpha > 0$. *Montrer que* $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *et en déduire la nature de* $\sum u_n$.

Correction.

1. *La série de terme général* $u_n = e^{-n^\alpha}$ *diverge pour* $\alpha \leq 0$ *puisque son TG ne tend pas vers* 0.
2. *Soit* $\alpha > 0$. *Par croissances comparées :*
$$n^2\, u_n = (n^\alpha)^{2/\alpha}\; e^{-n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $2 > 1$*, on en déduit que* $\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument}}$.

Conclusion : on vient de prouver que

$$\boxed{\sum u_n \text{ CV} \iff \alpha > 0}.$$

Exercice 3 (Annales khass II.11)**. Nature de série.** *Déterminer la nature, selon les réels positifs* a *et* b*, de la série de terme général :*

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}.$$

Correction. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b} = (n^3 + an)^{1/3} - (n^2 + b)^{1/2} = n\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1 + \frac{b}{n^2}\right)^{1/2},$$

que l'on va développer à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} u_n &= n\left[1 + \frac{a}{3n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - n\left[1 + \frac{b}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &= \frac{2a - 3b}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{2a - 3b}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

- *Si* $2a - 3b \neq 0$*, alors* $u_n \sim \frac{2a - 3b}{6n}$*, qui est de signe fixe. Donc la série* $\sum u_n$ *est de même nature que la série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$*, donc divergente.*
- *Si* $2a - 3b = 0$*, alors* $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$*. Attention, il n'est pas clair que* u_n *soit de signe fixe ! Par contre, on a aussi* $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann absolument convergente, donc (d'après les derniers théorèmes du cours) la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente, donc en particulier,* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

Ainsi,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } 2a - 3b = 0 \text{ si et seulement si } b = \frac{2a}{3}}.$$

Exercice 4. Nature de séries. *Étudier la nature de la série de terme général u_n où :*

1. $u_n = 1/n$ *si* n *est un carré, et 0 sinon.*
2. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$, *avec* $a > 0$.

Correction.

1. *Pour tout entier naturel* N, *on a :* $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{k^2}$. *La suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *est donc croissante, et majorée par la somme de la série convergente* $\sum \frac{1}{n^2}$. *On en déduit que la série* $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente}}$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *La fonction* $\arctan \in \mathscr{C}^1([n, a+n], \mathbb{R})$ *donc d'après l'égalité des accroissements finis, on a l'existence de* $c \in]n, a+n[$ *tel que* $u_n = \frac{a}{1+c^2}$. *Par décroissance de la fonction* $x \mapsto \frac{a}{1+x^2}$, *on a* $u_n \leq \frac{a}{1+n^2}$. *En particulier, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq u_n \leq \frac{a}{n^2}.$$

Or, $\sum \frac{a}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaison des SATP, on déduit que la série* $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente}}$.

Exercice 5. Télescopie. *Soit* $a > 0$ *et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = a$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.
2. *Déterminer la nature de la série* $\sum u_n$.

On pourra passer au ln dans l'égalité définissant u_n.

Correction.

1. *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.
   - *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
     En effet, on montre par récurrence immédiate que $\forall n, \ u_n > 0$.
     Donc $\forall n, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$.
     Donc $\forall n, \ u_{n+1} \leq u_n$.
   - *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par* 0.

   Par théorème de la limite monotone $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.
   Notons ℓ *sa limite.*
   En passant à la limite dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, *on obtient*

$$\ell = \ell e^{-\ell} \qquad \text{d'où} \qquad \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \ell = 0 \text{ ou } \ell = 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ell = 0}.$$

2. *Étudions la nature de la série* $\sum u_n$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ *et la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes* > 0, *on peut donc prendre le log népérien.*
   D'où
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - u_n,$$
   ou encore
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ = \ \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}).$$
   Ainsi, étudier la série $\sum u_n$ *revient à étudier la série télescopique* $\sum \big(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})\big)$, *qui a même nature (d'après le cours) que la* SUITE $\left(\ln u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comme $u_n \to 0$, *on a* $\ln u_n \to -\infty$, *donc la suite* $\left(\ln u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, donc* $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge}}$.

Exercice 6. Retour aux sommes partielles.

1. *Déterminer la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

   On exprimera les sommes partielles de la série, en calculant notamment $S_2, S_3, S_4, \ldots$

2. *Déterminer la nature de la série* $\sum u_n$ *où* $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction.

1. *On a* $S_2 = 1$, $S_3 = 0$, $S_4 = \dfrac{1}{2}\ldots$
   Pour $N \in \mathbb{N}^*$, *on a*
   $$\begin{aligned} S_{2N+1} &= \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ &= \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p}}{\lfloor \frac{2p}{2} \rfloor} + \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p+1}}{\lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor} \\ &= \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{p} + \frac{-1}{p} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$
   et $S_{2N+2} = S_{2N+1} + \dfrac{(-1)^{2N+2}}{\lfloor \frac{2N+2}{2} \rfloor} = 0 + \dfrac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$
   Les deux suites extraites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}^*}$ *convergent toutes les deux vers 0, donc par théorème la suite* $(S_N)_{N\geq 2}$ *tend vers 0, donc la série* $\boxed{\sum u_n \text{ converge et sa somme est nulle}}$.

2. *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$. *Notons* $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ *la somme partielle d'indice* N *de la série* $\sum u_n$. *Calculons*

la somme partielle $S_{N^2} = \sum_{n=1}^{N^2} u_n$. *Notons* C *l'ensemble des carrés dans* $[\![1, N^2]\!]$ *: il s'agit de* $C = \{k^2 \mid k \in [\![1, N]\!]\}$, *et calculons la somme partielle* $S_{N^2} = \sum_{n=1}^{N^2} u_n$. *Par définition de* (u_n), *on a*

$$\begin{aligned} S_{N^2} &= \sum_{n \notin C} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in C} \frac{1}{n} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in C} \frac{1}{n^2} \right) + \sum_{n \in C} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^4} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

On reconnait la somme de trois suites convergentes.

> *En effet, en notant* $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $Q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$ *(les sommes partielles des séries de Riemann convergentes* $\sum \frac{1}{n^2}$ *et* $\sum \frac{1}{n^4}$ *respectivement), on a*
>
> $$S_{N^2} = C_{N^2} - Q_N + C_N.$$
>
> *Par théorème, la suite extraite* $(C_{N^2})_{N \in \mathbb{N}^*}$ *est encore convergente.*

Par opérations, $\boxed{\text{la suite } (S_{N^2})_{N \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$.
De plus, puisque $\sum u_n$ *est une SATP, on sait que la suite des sommes partielles* (S_n) *est croissante.*
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leq n^2$, *donc* $S_n \leq S_{n^2}$. *Puisque la suite* (S_{n^2}) *converge, elle est majorée, donc par transitivité, la suite* (S_n) *est également majorée. Étant de plus croissante, elle converge d'après le TLM.*
Finalement, on en déduit que $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

Exercice 7. Terme général défini par morceaux. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n = \begin{cases} -\frac{4}{n} & \text{si } n \text{ est multiple de } 5 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon.} \end{cases}$

1. *Déterminer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{5n} u_k$.

2. *En déduire que* $\sum u_k$ *converge et déterminer* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Correction. *Notons* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_{5n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{5k+5} \\
&= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est du type

$$I_{4n} = \frac{4}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{4k}{4n}} \quad \text{où l'on a posé} \quad I_m = \frac{4}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{4k}{m}}.$$

La suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ *est une* *somme de Riemann* *de la fonction* $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$, *continue sur* $[0,4]$. *Donc :*

$$I_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \int_0^4 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \ln 5.$$

Par extraction, on a $I_{4m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \ln 5$ *c'est-à-dire*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{5n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 5}.$$

2. *Comme* $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 0$, *on en déduit que* $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ *a aussi pour limite* $\ln 5$.
   De la même manière, on montre que :
   $$\lim_{n\to+\infty} S_{5n+2} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+3} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+4} = \ln 5.$$
   On peut alors facilement montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $\ln 5$ *(analogue à un théorème du cours) et donc que*
   $$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln 5}.$$

Exercice 8. Ça se corse. *Étudier la nature de la série de terme général :*

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = n^{\frac{3}{2}}\left(\tan\frac{1}{n} - \mathrm{sh}\frac{1}{n}\right)$
3. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ *(où $\alpha \in \mathbb{R}$).*

Correction.

1. *On peut écrire* $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left[1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$.
   Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, *on a* $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   On en déduit que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   Donc
   $$u_n = n^{\frac{1}{n}}\left[-\frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right].$$
   Puisque $n^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, *on a* $\boxed{u_n \sim -\frac{1}{n^2}}$, *d'où* $\boxed{\text{la convergence (absolue) de } \sum u_n}$.
2. *Les fonctions* $\tan$ *et* sh *étant de classe* $\mathscr{C}^\infty$, *au voisinage de* 0, *elles admettent un* $DL_3(0)$ *que l'on peut écrire, par imparité,* $\tan x = x + \mathcal{O}(x^3)$ *et* $\mathrm{sh}x = x + \mathcal{O}(x^3)$.
   Ainsi,
   $$\tan x - \mathrm{sh}x \;=\; \mathcal{O}(x^3),$$
   d'où
   $$\tan\tfrac{1}{n} - \mathrm{sh}\tfrac{1}{n} \;=\; \mathcal{O}(\tfrac{1}{n^3}).$$
   Puis, en multipliant par $n^{\frac{3}{2}}$ *:*
   $$\boxed{u_n \;=\; n^{3/2}\times\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}.$$
   La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *converge absolument (série de Riemann avec* $\alpha = \frac{3}{2} > 1$*), donc par comparaison,* $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge absolument}}$.

3. *On a* $u_n = \exp(v_n)$ *avec* $v_n = n^\alpha \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}\cdot$

   - **Cas** $\alpha \leq 2$. *Alors* v_n *ne tend pas vers* $-\infty$ *et donc* u_n *ne tend pas vers* 0*, donc la série* $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

   - **Cas** $\alpha > 2$. *Montrons que* $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.
     Autrement dit, montrons que $n^2 u_n = \exp(v_n + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
     Comme $v_n \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$ *et* $\alpha > 2$*, on a* $v_n \to -\infty$ *et* $\ln n = o(v_n)$ *par croissances comparées.*
     Donc $v_n + 2\ln n = v_n + o(v_n) \sim v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
     Donc $\exp(v_n + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
     On a montré que $\boxed{u_n = o(\frac{1}{n^2})}$.
     La série $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge absolument, donc par théorème* $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge absolument}}$.

   Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2}$.

Exercice 9. Série absolument convergente. *Montrer que la série de terme général* $\sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$ *est absolument convergente.*

Indication : *on pourra commencer par étudier la série* $\sum_{n\geq 0} \sin((2-\sqrt{3})^n\pi)$.

Correction.

- $\sqrt{3} \simeq 1,73$ *donc* $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ *et* $(2-\sqrt{3})^n \to 0$.
  Comme $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$*, on a :* $\sin((2-\sqrt{3})^n\pi) \sim \underbrace{(2-\sqrt{3})^n}_{\text{t.g. d'une série géométrique convergente}} \pi$.
  De plus, $0 < (2-\sqrt{3})^n\pi < \pi$ *donc* $\sin((2-\sqrt{3})^n\pi) \geq 0$.
  Ainsi par comparaison des SATP, la série $\boxed{\sum_{n\geq 0} \sin((2-\sqrt{3})^n\pi) \text{ converge}}$.

- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Faisons le lien entre* $(2-\sqrt{3})^n$ *et* $(2+\sqrt{3})^n$. *On peut écrire :*

  $$(2+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n \quad \text{et} \quad (2-\sqrt{3})^n = a_n - \sqrt{3}b_n, \quad \text{avec} \quad (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2.$$

  En sommant, on obtient

  $$(2+\sqrt{3})^n\pi + (2-\sqrt{3})^n\pi = 2a_n\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$$

  donc $\sin((2+\sqrt{3})^n\pi) = \sin(-(2-\sqrt{3})^n\pi) = -\sin(2-\sqrt{3})^n\pi)$. *Ainsi,*

  $$|\sin((2+\sqrt{3})^n\pi)| = \underbrace{\sin((2-\sqrt{3})^n\pi)}_{\text{t.g. d'une série convergente}}.$$

Par comparaison des SATP, la série $\boxed{\sum_n \sin((2+\sqrt{3})^n \pi) \text{ est ACV donc CV}}$.

Calcul de sommes

Exercice 10. Calculs de somme (fractions rationnelles). *Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.*

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$.

Correction. *Toutes séries sont convergentes, par théorème de comparaison des SATP avec des séries de Riemann convergentes. Calculs simples A FINIR.*

(i) *On écrit* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ *puis télescopage.*

(ii) *On écrit* $\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{(k+1)(k-1)} = \dfrac{\frac{1}{2}[(k+1)-(k-1)]}{(k+1)(k-1)} = \dfrac{1/2}{k-1} - \dfrac{1/2}{k+1}$ *puis télescopage à deux crans ou en intercalant* $\dfrac{1/2}{k}$.

(iii) *DES. On écrit* $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1/2}{k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1/2}{k+2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, *puis on somme et on fait deux télescopages. On trouve* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}}$.

(iv) *On écrit*

$$p\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{(k+p)-k}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}.$$

Par télescopage, on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$p\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p!} - \frac{1}{N(N+1)\cdots(N+p)}.$$

Comme $p \in \mathbb{N}^*$, *on a pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$ *les sommes partielles*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{pp!} - \underbrace{\frac{1}{pN(N+1)\cdots(N+p)}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{pp!}.$$

La convergence des sommes partielles prouve la convergence de la série et donne la valeur de sa somme

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{pp!}}.$$

Exercice 11. Calcul de somme. *Étudier la convergence de* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$ *et calculer sa somme.*

Correction.

- $\dfrac{1}{n^3-n} \sim \dfrac{1}{n^3}$ *qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum \frac{1}{n^3-n} \text{ converge}}$. *Calculons la somme de cette série.*

- *On a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$ *donc* $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-x}$ *est une fonction rationnelle à pôles simples. Par théorème de DES, il existe* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{n(n+1)(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n-1},$$

et on trouve $\boxed{a = -1,\ b = \frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{2}}$.

Soit $N \geq 2$. *On a donc en sommant :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^3-n} &= -\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} \\
&= -\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \text{ (chgt d'indice dans les deux dernières sommes)} \\
&= -\frac{1}{2} - \sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} \\
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^3-n} &= -\frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles converge vers $\dfrac{1}{4}$ *donc la série converge et sa somme vaut*

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3-n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{4}}.$$

Remarque : *sinon, on découpe le* $\dfrac{1}{n}$ *en deux fois* $\dfrac{1}{2n}$ *et on fait apparaître deux sommes télescopiques du type* $u_{n+1} - u_n$ *et* $u_n - u_{n-1}$.

Exercice 12. Calcul de somme. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ *est absolument convergente puis calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Correction.

- *On a* $|u_n| \leq e\, 2^{-n}$ *(terme général d'une série géométrique convergente) donc* $\boxed{\sum u_n \text{ est ACV donc CV}}$.
- *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$ *fixé. On calcule :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{1 \leq k \leq n \leq N} 2^{-n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n && \text{en intervertissant les sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right] && \text{somme géométrique} \\
&= 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^k}{k!}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{-1/2}-1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^N}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{-1}-1} \\
&\xrightarrow[N \to +\infty]{} 2(e^{-1/2} - 1).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2(e^{-1/2} - 1)}$.

Exercice 13. Calcul de somme d'une série. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1. *Trouver $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = \alpha\sqrt{n} + \dfrac{\beta}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.*
2. *Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de (a,b) la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, et calculer sa somme le cas échéant.*

Correction.

1. *Remarquons que $\sum u_n$ n'est pas nécessairement une SATP. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On ré-écrit :*

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}.$$

Effectuons un développement asymptotique de u_n :
On rappelle que $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}a+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\alpha = 1+a+b \text{ et } \beta = \frac{1}{2}a+b \text{ conviennent}}$.

2.
   - *Si $\alpha \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
   - *Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, alors $u_n \sim \dfrac{\beta}{\sqrt{n}}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente, donc par comparaison des SATP (si $\beta > 0$) ou des SATN (si $\beta < 0$), on a $\sum u_n$ diverge.*
   - *Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, alors $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or $3/2 > 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, et positive, donc (d'après le dernier théorème du cours) la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.*
   Sinon *(en écrivant des o au lieu des $\mathcal{O}$), on trouve $u_n = -\dfrac{a+4b}{8}\dfrac{1}{n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Dans ce dernier cas, on a donc $u_n = -\dfrac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $-u_n \sim \dfrac{1}{4n^{3/2}}$ (terme général d'une série de Riemann convergente) donc par comparaison des SATP, $\sum(-u_n)$ converge donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.*

Finalement, $\boxed{\sum u_n \text{ converge ssi } \left(1+a+b=0 \text{ et } \frac{1}{2}a+b=0\right) \text{ ssi } (a,b) = (-2,1)}$.

3. *Supposons que* $(a,b)=(-2,1)$. *Dans ce cas,* $\underline{u_n=\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ *et pour tout* $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}u_n &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)+\sum_{n=0}^{N}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\\ &= -1+\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1} && \text{par télescopage}\\ &= -1+\frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}} && \text{(quantité conjuguée).}\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}u_n=-1$ *donc la suite des sommes partielles tend vers* -1, *donc la série* $\sum u_n$ *est convergente et sa somme vaut* $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=-1}$.

Exercice 14. Calcul de somme. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on pose*

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\qquad et \qquad I_n=\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t.$$

1. *La série* $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *est-elle absolument convergente ? Justifier la réponse.*

2. (a) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kI_k$.

   (b) *En déduire que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

3. *Déduire de ce qui précède que la série* $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *converge et préciser sa somme.*

Correction.

1. $\boxed{\text{Non}}$, *la série* $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *n'est pas absolument convergente, car la série* $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}$ *diverge.*

   Cherchons maintenant si la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *converge. Pour cela, étudions la suite des ses sommes partielles.*

2. (a) *Pour tout* $k\in\mathbb{N}$, $\underline{I_k=\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t=\frac{1}{2k+1}}$ *donc pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kI_k}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t^2)^k \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \mathrm{d}t && \textit{car la somme est finie} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \mathrm{d}t && \textit{car } -t^2 \neq 1 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t && \textit{par linéarité de l'intégrale} \\
&= [\arctan(t)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \\
\underline{S_n} &\underline{= \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente et la positivité de l'intégrale sur $[0,1]$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| = \left| (-1)^n \int_0^1 \underbrace{\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}_{\geq 0} \mathrm{d}t \right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

Montrons que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t = 0$, en majorant cette intégrale par une suite de limite nulle.

Pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$ et par croissance de l'intégrale,

$$\underline{\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}}.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3},$$

avec $\frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Par théorème d'encadrement, il s'ensuit que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire que $\boxed{\textit{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \textit{ converge}}$

et que $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$. *(D.S.E. de* $\arctan 1$*).*

Exercice 15. *Étudier la convergence de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$, *puis calculer sa somme.*

Indication : *on pourra utiliser le fait que* $\int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$ *pour tout entier naturel* p.

Correction.

- *La majoration* $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\right| \leq \frac{1}{4n^2}$ *assure la convergence absolue de la série. Elle est donc en particulier convergente.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Notons* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)}$ *la somme partielle d'ordre* n *de cette série. Calculons* S_n *afin de déterminer sa limite.*

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k[(2k+3)-(2k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(2k+1)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(2k+3)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(2k+1)} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2(2k+1)} \qquad \text{(changement d'inidice dans la deuxième somme)} \\
S_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+3)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.
\end{aligned}$$

D'après l'exercice précédent, on sait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4} - 1$. *Donc* $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$.

Nature de séries - terme général « abstrait »

Exercice 16. Des propriétés utiles.

1. *Soit* $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. *Montrer que si la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *converge, alors la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ *converge.*
2. *Soient* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *des séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \max(u_n, v_n)$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n v_n}$ *convergent.*
3. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. *On suppose que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ *convergent. Montrer que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge.*

Correction.

1. *On applique l'inégalité* $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ *pour obtenir :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^2}).$$

Or, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^2})$ *converge (en tant que combinaison linéaire de deux séries convergentes, l'une converge par hypothèse et l'autre est une série de Riemann convergente). Donc par théorème de comparaison des SATP, la série* $\boxed{\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ converge}}$.

2.
   - *L'interprétation géométrique du maximum donne :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \max(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n + |v_n - u_n|}{2} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}|v_n - u_n|.$$

   Par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |v_n - u_n| \leq |v_n| + |u_n| = v_n + u_n,$$

   car u_n *et* v_n *sont positifs. Donc*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n.$$

   Comme les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, par opération, la série* $\sum(u_n + v_n)$ *converge également. Puis, par théorème de comparaison des SATP,* $\boxed{\sum \max(u_n, v_n) \text{ converge}}$.

   - **Méthode 1.** *On déduit d'une inégalité remarquable :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.
   Or, la série $\sum(u_n + v_n)$ *converge (comme somme de deux séries convergentes) donc par*

théorème de domination des SATP, $\boxed{\sum \sqrt{u_n v_n} \text{ converge également}}$.
Méthode 2. *Comme les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont positives, on a*

$$0 \leq u_n v_n \leq \max(u_n, v_n)^2 \qquad \text{donc} \qquad 0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq |\max(u_n, v_n)| = \max(u_n, v_n).$$

D'après ce qui précède, $\sum \max(u_n, v_n)$ *converge. On conclut par théorème de comparaison.*

3. *On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n.$$

Or, la série $\sum(w_n - u_n)$ *est une série convergente (comme différence de deux séries convergentes). Par comparaison des SATP, on en déduit que* $\underline{\sum(v_n - u_n) \text{ converge}}$ *également. Enfin, en écrivant*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (v_n - u_n) + u_n,$$

on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ converge}}$.

Exercice 17. Transformation homographique. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs.*
On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Correction.

- *Supposons que* $\sum u_n$ *converge.*
  Méthode 1. *Alors en particulier,* $u_n \to 0$ *(condition nécessaire de convergence), donc* $1 + u_n \to 0$*, donc* $v_n \sim u_n$.
  Par hypothèse, $\sum u_n$ *est une SATP convergente. Donc, par théorème de comparaison des SATP, on en déduit que* $\sum v_n$ *converge.*
  Méthode 2. *Comme la suite* (u_n) *est positive, on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $1+u_n \geq 1$ *donc* $\dfrac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$, *d'où* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq u_n$. *La convergence de* $\sum u_n$ *implique celle de* $\sum v_n$.

- *Supposons que* $\sum v_n$ *converge.*
  Par définition de (v_n), *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n(1+u_n)$ *donc* $u_n(1-v_n) = v_n$.
  Comme précédemment pour l'autre implication, $v_n \to 0$, *donc* $1 - v_n \to 1$ *donc* $u_n \sim v_n$, *donc par théorème de comparaison des SATP,* $\sum u_n$ *converge.*
  Variante. *On remarque que* $v_n \neq 1$ *(le contraire et la définition de* (v_n) *mène à une absurdité, ou bien* $v_n \to 0$ *donc* $v_n \leq 1/2$ *APCR). On obtient alors*

$$(APCR) \qquad u_n = \frac{v_n}{1-v_n},$$

  et on conclut de la même manière ($v_n \to 0$, *donc* $1 - v_n \to 1$ *donc* $u_n \sim v_n$*).*

Finalement $\boxed{\sum u_n \text{ converge } \iff \sum v_n \text{ converge}}$, *i.e.* $\boxed{\text{les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ ont même nature}}$.

Exercice 18. Sous-espace vectoriel. *Soit* $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n^2 u_n^2 \text{ converge} \right\}$.
Montrer que F *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Correction. *Montrons que* F *est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.*

- *Il est clair que la suite nulle est dans* F*. En effet, la série de terme général* $n^2 0^2 = 0$ *converge (sa somme est nulle !).*

- *Montrons que* F *est stable par combinaison linéaire.*
  Soit $(u, v) \in F^2$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{R}^2$*.*
  Montrons que $\lambda u + v \in F$*, i.e. montrons que la série* $\sum n^2(\lambda u_n + v_n)^2$ *converge.*
  Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n^2(\lambda u_n + v_n)^2 \;=\; \lambda^2 n^2 u_n^2 \;+\; 2\lambda\, n^2 u_n v_n \;+\; n^2 v_n^2.$$

  Examinons les trois termes de cette somme.
  ▷ *Comme* $u \in F$*, la série* $\sum n^2 u_n^2$ *converge.*

  ▷ *Idem pour* v*.*
  ▷ *Montrons que la série* $\sum n^2 u_n v_n$ *converge (en passant par l'absolue convergence pour se ramener à des SATP).*
  On rappelle que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$*. En appliquant cette inégalité à* $a = nu_n$ *et* $b = nv_n$*, on a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |n^2 u_n v_n| \;=\; |(nu_n)(nv_n)| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\Big(n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2\Big).$$

  Les séries $\sum n^2 u_n^2$ *et* $\sum n^2 v_n^2$ *convergent (car* $(u, v) \in F^2$*).*
  Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2}\Big(n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2\Big)$ *converge.*
  Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |n^2 u_n v_n|$ *converge, c'est-à-dire que la série* $\sum n^2 u_n v_n$ *converge absolument, donc converge (par théorème).*

Bilan. *Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série* $\sum n^2(\lambda u_n + v_n)^2$ *converge, ce qui signifie que* $\lambda u + v \in F$*.*

Exercice 19. Une double inégalité (série télescopique). *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels telles que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_k \leqslant w_{k-1} - w_k.$$

On suppose de plus que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*.*

1. *Montrer que la série* $\sum u_k$ *converge. On note* U *sa somme.*

2. *En notant* $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$*, montrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U - w_n + \ell \;\leqslant\; U_n \;\leqslant\; U.$$

Correction.

1. *Par hypothèse, la suite (w_n) CV donc la série télescopique $\sum(w_{n-1} - w_n)$ CV (lien suite-série).*
   Par théorème de comparaison des SATP $\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$.

2. *Comme (u_n) est positive, on sait que la suite (U_n) est croissante.*
   De plus, d'après la question 1., $\sum u_n$ CV donc la suite (U_n) CV.
   (U_n) est croissante et convergente, donc converge vers sa borne supérieure (TLM), d'où
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U.$$
   L'autre inégalité revient à montrer que $U - U_n \leq w_n - \ell$, où $U - U_n$ désigne le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$.
   D'après l'encadrement de l'énoncé, on a
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k \leq (w_{k-1} - w_k).$$
   En sommant pour $k \in [\![n+1, N]\!] \subset \mathbb{N}^*$, on obtient
   $$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{N} (w_{k-1} - w_k)}_{=w_n - w_N}.$$
   PPL quand $N \to +\infty$, on obtient :
   $$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{=U-U_n} \leq w_n - \ell,$$
   ce qui conclut.

Exercice 20. Un classique. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. *On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$?*

2. *On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$?*
   Indication : *écrire a_n en fonction de S_n puis considérer l'équivalent $1 - x \underset{x \to 1}{\sim} -\ln x$.*

3. *On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$?*
   Indication : *on pourra considérer $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Correction.

1. *Puisque la série* $\sum u_n$ *converge, on peut introduire sa somme* $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
   Les termes sommés étant strictement positifs, on a $\ell > 0$, *et* $S_n \to \ell$ *donne alors* $S_n \sim \ell$.
   On en déduit
   $$\frac{a_n}{S_n} \sim \frac{a_n}{\ell}.$$
   Par hypothèse, la série $\sum a_n$ *converge, donc* $\sum \frac{a_n}{\ell}$ *converge aussi et par équivalence de séries à termes positifs,* $\boxed{\text{la série } \sum \frac{a_n}{S_n} \text{ converge également}}$.

2. *Écrivons* $\frac{a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$.

   - *si la suite* $\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ *ne tend pas vers 1, la série étudiée diverge grossièrement.*
   - *si* $\frac{S_{n-1}}{S_n} \to 1$, *alors on utilise l'indication :* $1 - x \underset{x\to 1}{\sim} -\ln x$, *pour obtenir*
     $$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \sim -\ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$$
     c'est-à-dire
     $$\frac{a_n}{S_n} \sim \ln S_n - \ln S_{n-1}.$$
     Par hypothèse, la suite (S_n) *diverge, donc la suite* $(\ln(S_n))$ *diverge donc la série télescopique* $\sum (\ln S_n - \ln S_{n-1})$ *diverge.*
     Enfin, par théorème de comparaison des STAP, on en déduit que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ *diverge.*

   Dans tous les cas, $\boxed{\sum \frac{a_n}{S_n} \text{ diverge}}$.

3. *Comme les termes sont positifs, on a* $S_n \geq S_{n-1}$ *et donc*
   $$\frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$
   La série à termes positifs $\sum a_n$ *étant supposée divergente, la suite* (S_n) *tend vers* $+\infty$ *et donc* $\frac{1}{S_n} \to 0$.
   La nature de la suite (u_n) *étant celle de la série télescopique* $\sum(u_n - u_{n-1})$, *on peut affirmer la convergence de la série* $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ *puis* $\boxed{\text{la convergence de la série } \sum \frac{a_n}{S_n^2}}$, *par comparaison de séries à termes positifs.*

Exercice 21. Un classique. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive.*

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par définie par $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$.

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1. *Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - Nv_N$.*
2. *En déduire que la série $\sum v_n$ converge.*
3. *Montrer ensuite que Nv_N tend vers une limite finie lorsque $N \to +\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.*
4. *En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.*

Correction.

1. *Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. On utilise la définition de v_n, on fait apparaître une somme double, on intervertit les sommes, puis on décompose la fraction $\dfrac{1}{n(n+1)}$ en $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$; et enfin, on télescope !*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_k\right)\\
&= \sum_{1\le k\le n\le N}\left(\frac{1}{n(n+1)}ku_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N}\left(ku_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N}\left(ku_k\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} ku_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} u_k \ - \ \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} ku_k\\
&= \sum_{k=1}^{N} u_k \ - \ Nv_N.
\end{aligned}$$

2. *Montrons que la série $\sum v_n$ converge en montrant que sa **suite** des sommes partielles converge.*

D'après la question 1., on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{k=1}^{N} u_k - \underbrace{N v_N}_{\geq 0} \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} u_k.\end{aligned}$$

En notant pour tout $N \in \mathbb{N}$, $V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$ *et* $U_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$, *les sommes partielles associées aux séries* $\sum v_n$ *et* $\sum u_n$, *on a*

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ V_N \leqslant U_N. \qquad (\star)$$

Or la série $\sum u_n$ *converge, donc la suite des sommes partielles* $(U_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *converge, donc est en particulier majorée.*
En utilisant $(\star)$, *on en déduit que la suite* $(V_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée.*
Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq 0$, *on a par théorème (conséquence du TLM car* $(V_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante) que la suite des sommes partielles* $(V_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*
On conclut que $\boxed{\sum v_n \text{ est convergente}}$.

3. • *D'après la question 1., on a*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad N v_N = U_N - V_N.$$

Les suites $(U_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(V_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *convergent (hypothèse et 2), donc, par somme, la suite* $(Nv_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ *converge également.*
• *Montrons que* $\lim_{N\to+\infty} N v_N = 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim_{N\to+\infty} N v_N = \ell \neq 0$.
On a alors

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ell \times \frac{1}{N}$$

Or $\frac{1}{N}$ *est le terme général d'une série divergente.*
Par comparaison de séries à termes positifs (le terme général v_N *l'est), on en déduit que la série* $\sum v_N$ *diverge, ce qui contredit 2. Donc* $\boxed{\lim_{N\to+\infty} N v_N = 0}$.

4. *Il suffit de passer à la limite quand* $N \to +\infty$ *dans l'égalité 1 (licite, car les limites existent) et d'utiliser la question 3. qui dit que* $N v_N \to 0$.

Séries alternées

Exercice 22. Théorème spécial des séries alternées (TSSA) - programme spé.
Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite positive, décroissante et de limite nulle.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ converge.

Indication : *on pourra introduire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles et montrer que les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

Correction. *On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n := (-1)^n v_n$ et $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de la série $\sum u_n$.*
Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes car :

- $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+2}-S_{2n} = (-1)^{2n+1}v_{2n+1}+(-1)^{2n+2}v_{2n+2} = v_{2n+2}-v_{2n+1}\leq 0$ *car (v_n) est décroissante. Donc (S_{2n}) est décroissante.*
- $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+3}-S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}v_{2n+3}+(-1)^{2n+2}v_{2n+2} = v_{2n+2}-v_{2n+3}\geq 0$ *donc (S_{2n+1}) est croissante.*
- $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}-S_{2n} = -v_{2n+1}\to 0$*, car $v_n\to 0$ par hypothèse.*

Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en particulier, ***(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite $\ell = \sup_n S_{2n+1} = \inf_n S_{2n}$****. Par théorème, on en déduit que la suite des sommes partielles (S_n) converge i.e. que la série* $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ *et*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_1\leq S_3\leq\cdots\leq S_{2n+1}\leq S_{2n+3}\leq \ell = \sum_{k=0}^{+\infty}u_k \leq S_{2n+2}\leq S_{2n}\leq\cdots\leq S_2\leq S_0.$$

Exercice 23. Séries de Riemann alternées. *Déterminer les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.*

Correction. *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.*

- *Si $\alpha\leq 0$, alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.*
- *Supposons que $\alpha>0$. Alors la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.*

Finalement, $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha>0}$.

A comparer avec : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 1}$.

Exercice 24. Avec le critère des séries alternées. *Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série* $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n-x}$.

Correction. *Posons $u_n = \dfrac{1}{n-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq x$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive, décroissante et tend vers 0. On en déduit, d'après le théorème des séries alternées, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ donc, par le caractère asymptotique de la notion de série convergente, celle de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$.*

Exercice 25. Application du TSSA, DL. *Étudier la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

On pourra faire un développement asymptotique.

Correction.

- *La série n'est pas de signe fixe donc pas de théorème de comparaison !*
- *Terme général de la forme $(-1)^n v_n$, avec (v_n) qui tend vers zéro mais qui n'est pas décroissant donc pas de TSSA !*
- *On ne sait pas calculer les sommes partielles.*
- ***Faisons un développement asymptotique !*** *Soit $n \geq 2$. Notons* $u_n := \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$, *et utilisons* $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+\mathcal{O}(u^2)$. *On obtient alors :*

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\Sigma CV (TSSA)} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{série harmonique DV}} + \underbrace{\mathcal{O}(\frac{1}{n^{3/2}})}_{\Sigma ACV \text{ donc } CV^*}.$$

N.B. *: pour justifier le fait que la dernière série converge, on utilise la dernière partie du cours ! Comme $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est le terme général d'une série (de Riemann)* ***absolument convergente****, on en déduit que la série de terme général $\mathcal{O}(\dfrac{1}{n^{3/2}})$ est* ***absolument convergente*** *donc* ***convergente****.*

Finalement, par opérations, on conclut que la série $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} \text{ est divergente}}$.

- **Remarque.** *C'est un exemple où* $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et pourtant les deux séries ne sont pas de même nature (cela s'explique par le fait que les séries ne sont pas de signe fixe).*

Lien suite-série, lien série-intégrale

Exercice 26. Comparaison série-intégrale, encadrement de somme. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ *diverge et donner un équivalent simple de* $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$.

Correction.

- **Première méthode.** $\forall n \geq 3 \ \dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$ *et la série harmonique* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge donc par comparaison des SATP,* $\boxed{\sum \dfrac{\ln n}{n} \text{ diverge}}$.

- **Deuxième méthode.** *Utilisons une comparaison série-intégrale pour obtenir un encadrement et traiter les deux points en même temps.*
  On peut écrire $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n} = \sum_{n\geq 1} f(n)$, *avec* $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, *positive, continue et décroissante sur* $[e, +\infty[$ *(car* $\forall x \in [e, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$*).*
  Fixons $\underline{n \geq 3}$. *D'après la méthode des rectangles, on a donc :*

$$0 \leq \int_3^{n+1} f \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq f(3) + \int_3^n f.$$

  Or, $\int_3^{n+1} f = \int_3^{n+1} \dfrac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \left[\dfrac{\ln(t)^2}{2}\right]_3^{n+1} = \dfrac{(\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2}{2} \to +\infty$ *donc par théorème de comparaison la suite* $\left(\sum_{k=3}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{n\geq 3}$ *tend vers* $+\infty$ *donc la suite des sommes partielles* $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{n\geq 1}$ *tend vers* $+\infty$. *On en déduit que* $\boxed{\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln n}{n} \text{ diverge}}$.
  De plus, on a l'encadrement :

$$\frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2}{2} \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln 3}{3} + \frac{(\ln n)^2 - (\ln 3)^2}{2}.$$

  Or, $\dfrac{(\ln(n+1))^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2}$ *donc* $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2}}$.

Exercice 27. Intégrale de Wallis et formule de Stirling.

PARTIE A *: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis par $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.*

1. *Pour tout entier $n \geq 2$, établir la formule de récurrence : $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.*
2. *On introduit la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ définie par $W_n = nI_nI_{n-1}$. Montrer que (W_n) est constante.*
3. *Que pouvez-vous dire sur la suite (I_n) ? Justifier d'une éventuelle convergence.*
4. *Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$.*
5. *En déduire un équivalent de I_n.*
6. *Exprimer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

PARTIE B *: Le but de cette partie est de démontrer la formule de Stirling.*
On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

7. *Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.*
   Indication : *on pourra étudier la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
8. *En fonction de l'expression de I_{2p}, déterminer un équivalent de I_{2p} quand p tend vers l'infini.*
9. *Déterminer enfin ℓ.*
10. *En déduire la formule de Stirling.*

Correction. *Éléments de réponse.*

1. *Faire une IPP en mettant de côté $\cos^2 t$. On trouve $\forall n \geq 2,\ I_n = I_{n-2} - \dfrac{1}{n-1} I_n$.*
2. *On le déduit de la question précédente en multipliant par I_{n-1}, il vient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_n = W_{n-1}}$, donc (W_n) est constante, égale à son premier terme : $W_1 = I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.*
3.
   - *(I_n) est décroissante (car $\forall n,\ I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale d'une fonction négative).*
   - *(I_n) est minorée par 0 (car I_n est l'intégrale d'une fonction positive).*
   - *Ainsi, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$ d'après le théorème de la limite monotone.*
4. *(I_n) décroissante implique que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.*
   Grâce à la relation de récurrence satisfaite par (I_n), on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$
   Comme $\lim \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, la suite de gauche est équivalente à I_n.
   Par théorème d'encadrement par les équivalents, on a $\boxed{I_n \sim I_{n+1}}$.

5. *(W_n) étant constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \dfrac{\pi}{2}$.*
   On a aussi, $W_n = nI_nI_{n-1} \sim nI_n^2$.
   En combinant ces deux informations, on a $nI_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ puis $\sqrt{n}|I_n| \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
   Comme $I_n \geq 0$, on a $\boxed{I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.

6. *En itérant la formule de récurrence, on trouve $\boxed{I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$.*
   Sinon, preuve propre par télescopage.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. On a d'après la formule de récurrence : $\forall q$, $\dfrac{I_{2q+2}}{I_{2q}} = \dfrac{2q+1}{2q+2}$ i.e. $\dfrac{I_{2(q+1)}}{I_{2q}} = \dfrac{2q+1}{2q+2}$.
   En faisant le produit pour q dans $[\![0, p-1]\!]$, on obtient par télescopage

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{q=0}^{p-1} \frac{2q+1}{2q+2}.$$

   Or,

$$\prod_{q=0}^{p-1} \frac{2q+1}{2q+2} = \frac{\prod_{q=0}^{p-1}(2q+1)}{\prod_{q=0}^{p-1}(2q+2)} = \frac{\prod_{q=0}^{p-1}(2q+1)\prod_{q=0}^{p-1}(2q+2)}{\prod_{q=0}^{p-1}(2q+2)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{\prod_{q=0}^{p-1}\left[2^2(q+1)^2\right]} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2},$$

   et $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui conclut.

7. *On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.*
   Par définition de (u_n), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \times \frac{e^{n+1}}{e^n} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= (n+1) \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} \times e \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \\
&= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\
&= e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln u_{n+1} - \ln u_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\ &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ *est ACV, on sait par théorème que la série* $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *l'est aussi, i.e. la série télescopique* $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ *est ACV, donc convergente.*
Sachant que la suite $(\ln u_n)$ *et la série* $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ *sont de même nature, on en déduit que* $\boxed{\textit{la suite } (\ln u_n) \textit{ converge}}$ *vers un certain réel, que l'on notera* $v \in \mathbb{R}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $u_n = e^{\ln u_n}$, *donc par continuité de l'exponentielle en* v, *la suite* (u_n) *converge vers* $\ell := e^v > 0$.

8. *Comme* (u_n) *converge vers* $\ell \neq 0$, *on a* $\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \sim \ell$ *donc* $n! \sim \ell\sqrt{n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

   Ainsi, $\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{\ell\sqrt{2p}}}$.

9. *Or, d'après la question 5),* $I_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. *La suite* $(I_{2p}\sqrt{p})_{p\in\mathbb{N}}$ *converge donc vers* $\frac{\pi}{\ell\sqrt{2}}$ *et* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   Par unicité de la limite, on en déduit que $\boxed{\ell = \sqrt{2\pi}}$.

10. *Ainsi, on obtient la formule de Stirling :* $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n}$.