Produit scalaire, norme

Exercice 1. Identité du parallélogramme. *Soient E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée. Montrer $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. Pourquoi ce titre ?*

Correction. *Cette inégalité provient du fait que :*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$

En additionnant les deux égalités, on obtient l'égalité souhaitée : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des 4 côtés. $\boxed{\text{Dans un parallélogramme } ABCD,\ AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)}$*. Faire un DESSIN.*

Exercice 2. *Pour $u = (x,y)$ et $u' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose :*

$$\varphi(u, u') = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y \quad \text{et} \quad \psi(u, u') = 2xx' - 2yy' + xy' + x'y.$$

1. *Vérifier que φ et ψ sont des formes bilinéaires symétriques.*
2. *φ et ψ sont-ils des produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$?*

Correction.

1. - *On vérifie que $\forall (u_1, u_2, u') \in (\mathbb{R}^2)^3,\ \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, u') = \alpha_1 \varphi(u_1, u') + \alpha_2 \varphi(u_2, u')$. Ainsi φ est linéaire à gauche.*
     φ est bien sûr symétrique car $\varphi(u, u') = \varphi(u', u)$. Ainsi, φ est bilinéaire.
     Donc $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique}}$.
   - *De même, ψ est donc une forme bilinéaire symétrique.*
2. *Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.*
   - *Soit $u = (x,y)ß, \mathbb{R}^2$. On a $\varphi(u,u) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right] \geq 0$.*
     De plus, $\varphi(u,u) = 0$ implique que $(x + \frac{1}{2}y)^2 = 0$ et $\frac{3}{4}y^2 = 0$ donc $y = 0$ et $x = 0$ d'où $u = 0$.
     D'où φ est définie positive.
     Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^2}$.
   - *En revanche,* $\boxed{\psi \text{ n'est pas un produit scalaire sur } \mathbb{R}^2 \text{ car } \Psi \text{ n'est pas positive}}$.
     En effet, $\forall u \in \mathbb{R}^2,\ \psi(u,u) = 2x^2 - 2y^2 + 2xy$, donc pour $u = (0,1), \psi(u,u) = -2 < 0$.

Exercice 3. *Soient un entier $n \geq 2$, $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ et* $\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x \end{array}$.

1. *Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

2. *Montrer que φ définit un produit scalaire sur E, et expliciter la norme euclidienne associée.*

Correction.

1.
   - $0 \in E$ donc $E \neq \varnothing$.
   - *Soient $(P,Q) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a : $\alpha P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\alpha P + Q)(0) = (\alpha P + Q)(1) = 0$ donc $\alpha P + Q \in E$.*

   Ainsi $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.

2.
   - *φ est une forme bilinéaire car la dérivation et l'intégration sont linéaires.*
   - *Soit $(P,Q) \in E^2$. Une IPP donne :*

   $$\varphi(P,Q) = -\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x = -\underbrace{\left[P(x)Q'(x)\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

   L'expression étant symétrique en P et Q, on a $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ donc $\underline{\varphi \text{ est symétrique}}$.

   - *Soit $P \in E$. On en déduit que $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x \geq 0$ donc $\underline{\varphi \text{ est positive}}$.*

   Supposons que $\varphi(P,P) = 0$. Alors $\displaystyle\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x = 0$, et la fonction $x \mapsto P'(x)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc la fonction $x \mapsto P'(x)$ est nulle sur $[0,1]$. Ainsi, la fonction P est constante sur l'intervalle $[0,1]$. Or, $P(0) = 0$ donc la fonction P est nulle sur $[0,1]$. Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul. Ainsi $\underline{\varphi \text{ est définie}}$.

   En conclusion, φ est une forme bilinéaire symétrique, définie, positive donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire}}$.
   De plus, la norme euclidienne associée à ce produit scalaire est :

   $$\sqrt{\varphi(P,P)} \underset{(*)}{=} \left(\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|P'\|_2 \,.$$

Exercice 4. *Pour tout* $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, *on pose :* $(A|B)=\mathrm{Tr}(A^TB)$.

1. *Montrer que* $(.|.)$ *est un produit scalaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Vérifier que* $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *sont orthogonaux.*
3. *Montrer que* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})=(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.
4. *Soit* F *l'ensemble des matrices diagonales de* E. *Déterminer* $F^\perp$.

Correction. *Remarquons que pour tout* $A=(a_{i,j}),B=(b_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A|B)=\mathrm{Tr}(A^TB)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j},$$

qui correspond au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *La norme euclidienne associée est la norme 2.*

1. *Soit* $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.
   - $(.|.)$ *est symétrique car* $(A|B)=\mathrm{Tr}(A^TB)=\mathrm{Tr}((A^TB)^T)=\mathrm{Tr}(B^TA)=(B|A)$.
   - $(.|.)$ *est linéaire à gauche car la transposition et la trace sont linéaires. Par symétrie,* $(.|.)$ *est linéaire à droite. Ainsi,* $(.|.)$ *est bilinéaire.*
   - $(A|A)=\mathrm{Tr}(A^TA)=\sum_{i,j}a_{i,j}^2\geq 0$, *donc* $(.|.)$ *est positive.*
   - $(A|A)=0$ *implique que* $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}=0$ *donc* $A=0$.
2. *Soient* $A\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ *et* $S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *On a :*

   $$(S|A)=\mathrm{Tr}(S^TA)=\mathrm{Tr}(SA)=\mathrm{Tr}(S(-A^T))=-\mathrm{Tr}(SA^T)=-\mathrm{Tr}(A^TS)=-(A|S)=-(S|A)$$

   ou bien :

   $$(S|A)=\mathrm{Tr}(S^TA)=\mathrm{Tr}(SA)=\mathrm{Tr}((SA)^T)=\mathrm{Tr}(A^TS^T)=-\mathrm{Tr}(AS)=-\mathrm{Tr}(SA)=-(S|A).$$

   Ainsi, $2(S|A)=0$ *puis* $(S|A)=0$ *i.e.* $\boxed{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\subset(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp}$ *i.e.* $\boxed{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\text{ et }\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\text{ sont orthogonaux}}$.
3. *On a classiquement* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. *Puisque* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est un espace euclidien, on a aussi :* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp$. *Comme tous ces espaces vectoriels sont de dimension finie, on a donc :*

   $$\underline{\dim\mathscr{S}_n(\mathbb{R})=\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))-\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))=\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp}.$$

   Or, on a montré à la question 2. que $\underline{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\subset(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp}$ *donc on a l'égalité* $\boxed{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})=(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp}$.

   Ainsi, $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\overset{\perp}{\oplus}\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\text{ pour le produit scalaire canonique }(A,B)\mapsto\mathrm{Tr}(A^TB)}$.
   Alternative. *On peut aussi invoquer l'unicité du supplémentaire orthogonal.*
4. - *Soit* $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - *On a* $F=\mathrm{Vect}\,(E_{1,1},\dots,E_{n,n})$.

- *Soit* $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *On a*

$$\begin{aligned}
M \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n,\ (M|\alpha_1 E_{1,1}+\cdots+\alpha_n E_{n,n}) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ (M|E_{k,k}) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{Tr}(M^T E_{k,k}) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n (M^T E_{k,k})_{i,i} = 0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (M^T)_{i,j}(E_{k,k})_{j,i} = 0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ (M^T)_{k,k} = 0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ M_{k,k} = 0.
\end{aligned}$$

- *Ainsi,* $\boxed{F^\perp = \{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M_{k,k}=0\}}$ *i.e.* $F^\perp$ *est l'ensemble des matrices ne comprenant que des zéros sur la diagonale.*

Exercice 5. *Soient* E *un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$ *et* $p\in\mathbb{N}^*$. *On suppose qu'il existe une famille* $(e_1,\dots,e_p)$ *de vecteurs unitaires de* E *vérifiant :* $\forall x\in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p (x|e_i)^2$.
Montrer que $(e_1,\dots,e_p)$ *est une base de* E.

Correction.

- *Tout d'abord, intéressons-nous à la* **liberté** *de la famille* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. *Par hypothèses,*

$$1 = \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^p (e_k|e_i)^2 = \underbrace{(e_k|e_k)^2}_{=1} + \sum_{i\neq k}(e_k|e_i)^2,$$

donc $\forall k\neq i, (e_k|e_i) = 0$ *i.e. la famille* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est orthogonale. Les vecteurs* e_i *sont unitaires par hypothèse donc* $\boxed{(e_i)_{1\leq i\leq n} \text{ est une famille orthonormée, donc libre}}$.

- *Montrons ensuite que* $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ *est* **génératrice** *de* E. *Soit* $x\in E$.

Première méthode . *Montrons que* $x = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i \right\|^2 &= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i \right\|^2 - 2\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{p} \|(x|e_i)e_i\|^2 - 2\|x\|^2, \quad \text{car les } e_i \text{ sont orthogonaux (Pythagore) et par hypothèse} \\
&= \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} - \|x\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 - \|x\|^2 \\
&= 0 \qquad \text{par hypothèse.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $x - \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i = 0_E$ *donc* $x = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$ *donc* $\boxed{(e_i) \text{ est génératrice de } E}$.

Deuxième méthode. *Notons* $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *et montrons que* $E \subset F$ *(l'autre inclusion étant immédiate). Soit* $x \in E$. *Comme* <u>(e_i) *est une BON de* F</u>, *on a :* $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$ *donc* $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 = \|x\|^2$ *(par hypothèse). D'après le théorème de Pythagore, on a*

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

d'où $x = p_F(x) \in F$ *puis* $\boxed{E = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)}$.

- *Ainsi,* $(e_1, \ldots, e_p)$ *est une famille libre et génératrice de* E *donc* $\boxed{(e_1, \ldots, e_p) \text{ est une base de } E}$, <u>$\dim E = p$</u> *et finalement* <u>$E$ *est un espace euclidien*</u>.

  Troisième méthode. *Notons* $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. E *étant un espace préhilbertien réel et* F *étant un ssev de dimension finie de* E, *on sait que* $E = F \oplus F^{\perp}$. *Montrons que* $F^{\perp} = \{0_E\}$.
  Soit $y \in F^{\perp}$. *Alors* $\forall i \in [\![1, p]\!],\ (y|e_i) = 0$.
  Puisque $y \in E$, *on a par hypothèse* $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (y|e_i)^2$. *Donc* $\|y\|^2 = 0$ *puis* $y = 0_E$, *ce qui conclut.*

  Quatrième méthode (proposée par Benoît Dupont). *Soit* $x \in E$. *Montrons que* $x \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
  Raisonnons par l'absurde et supposons que $x \notin \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. *Comme par hypothèse,* $(e_1, \ldots, e_p)$ *est libre, on a aussi* $(e_1, \ldots, e_p, x)$ *est libre. D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on peut construire un vecteur* e_{p+1} *de* E, *unitaire, orthogonal aux vecteurs* $e_1, \ldots, e_p$.

> *En effet, il suffit de poser* $f_{p+1} = x - p_F(x) = x - \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$*, et* $e_{p+1} = \dfrac{f_{p+1}}{\|f_{p+1}\|}$ *(licite car* $f_{p+1} \neq 0$*).*

Comme $e_{p+1} \in E$*, on peut lui appliquer l'hypothèse, et obtenir*

$$1 = \|e_{p+1}\| = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(e_{p+1}|e_i)}_{=0}^{2} = 0 \quad : \quad \textit{absurde !}$$

Donc $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$*, ce qui conclut.*

Exercice 6. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Montrer* $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$*, et étudier le cas d'égalité.*

Correction. *Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$ *et aux vecteurs* $a = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $b = (1, \ldots, 1)$*, on a* $(a|b)^2 \leq (a|a)(b|b)$*, i.e.*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \times 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right) = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

$\boxed{\text{Il y a égalité si, et seulement si, } (a,b) \text{ est liée ssi } \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid (x_1, \ldots, x_n) = \lambda(1, \ldots, 1) \text{ ssi } x_1 = \cdots = x_n}$.

Exercice 7. *Montrer :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 \leq \dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

Correction.

- *Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$*, on a :* $\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \times 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) = \dfrac{n(n+1)}{2} \times n = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$.
- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ 1 \leq i$ *donc* $1 \leq \sqrt{i}$ *puis* $0 \leq \sum_{i=1}^{n} 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$ *puis* $n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2$*, ce qui donne la première inégalité.*

Exercice 8. Astucieux. *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$*. Montrer que* $(x + y + z)^2 \leq \dfrac{17}{10}$.

Correction. *Considérons le produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^3$*.*
D'une part, l'hypothèse $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$ *se reformule* $\|w\|^2 \leq 1$ *où* $w = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$*.*
D'autre part, on réalise la somme $x + y + z$ *comme un produit scalaire :*

$$x + y + z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}x \;+\; 1 \times y \;+\; \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}z \;=\; \langle v, w\rangle\,,$$

où $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}})$ et w est défini précédemment.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle v, w\rangle^2 \quad leq \ \|v\|^2 \|w\|^2,$$

où ici $\|v\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{17}{10}$ *et* $\|w\|^2 \leq 1$, *donc* $\boxed{(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}}$.

Exercice 9. *Montrer :* $\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geq \frac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$.

Correction. *Tout d'abord, puisque $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$, et par stricte croissance de l'intégrale, on a* $\displaystyle\int_0^1 f > 0$.
L'inégalité demandée est donc équivalente à : $1 \leq \left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right)$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, on a :

$$1 = \int_0^1 1 = \int_0^1 \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{f}} \leq \left(\int_0^1 f\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right)^{1/2}.$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Exercice 10. Délicat. *Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.*

1. *Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, on a*

$$f^2(t) \ \leq \ (t-a)\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u.$$

2. *En déduire que*

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \ \leq \ \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u.$$

Correction.

1. *Fixons $t \in [a,b]$.*
Considérons le produit scalaire (je vous laisse vérifier que c'est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive) :

$$\langle g, h\rangle \ = \ \int_a^t gh.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et s'annule en a, on a par le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(t) \ = \ \int_a^t f'(u)\mathrm{d}u \ = \ \int_a^t 1 \times f'(u)\mathrm{d}u.$$

Ainsi, t étant toujours fixé, le réel $f(t)$ se présente comme le produit scalaire $\langle 1, f'\rangle$.

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle 1, f' \rangle^2 \;\leq\; \|1\|^2 \, \|f'\|^2,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f^2(t) &\leq \left(\int_a^t 1 \, \mathrm{d}u\right) \left(\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u\right) \\ &\leq (t-a) \int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

2. Reprenons ce qui précède à t fixé :

$$\begin{aligned} f^2(t) &\leq (t-a) \int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u && \text{d'après 1.} \\ &\leq (t-a) \int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u && \text{car } f'^2 \geq 0 \text{ et } t \leq b. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall\, t \in [a,b], \quad f^2(t) \;\leq\; (t-a) \underbrace{\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u}_{\text{constante par rapport à } t}.$$

Par croissance de l'intégrale (car $a < b$), il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \;&\leq\; \left(\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t\right) \left(\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u\right) \\ &\leq\; \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{ce qui conclut}}$.

Exercice 11. La routine. *Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$. Déterminer* $\inf\limits_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$.
Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Correction. *Utilisons le produit scalaire sur E défini par $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$.*
Soit $f \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire

$$\left| \left\langle \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}} \right\rangle \right|^2 \;\leq\; \left\|\sqrt{f}\right\|^2 \times \left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\right\|^2$$

d'où

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}.$$

Autrement dit, $(b-a)^2$ est un minorant de l'ensemble $\left\{ \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \mid f \in E \right\}$, qui est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

D'où

$$(b-a)^2 \leq \inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right).$$

De plus, pour $f_0 = 1$ qui est élément de E, on a l'égalité $(b-a)^2 = \displaystyle\int_a^b f_0 \times \int_a^b \frac{1}{f_0}$.
Ainsi, la borne inférieure est atteinte (c'est donc un minimum), par exemple par la fonction constante égale à 1 (et plus généralement, par les fonctions constantes non nulles).
On a donc montré

$$\boxed{\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) = \min_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) = (b-a)^2}.$$

Exercice 12. Théorème (de Reisz) de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien .
Soit E un espace euclidien.
Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\psi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a|x) \end{array}$.

Correction. Méthode 1 (isomorphisme). *Soient $\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a|x) \end{array}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$. Montrons que φ est un isomorphisme.*

- *φ est bien définie de E dans E^* car le le p.s. est linéaire à droite.*
- *φ est linéaire car le p.s. est linéaire à gauche.*
- *Soit $a \in \mathrm{Ker}\varphi$. On a $\varphi_a = 0$ donc $\forall x \in E, (a|x) = 0$. En particulier, pour $x = a$, on obtient $(a|a) = 0$, d'où par définition du p.s., $a = 0$. Ainsi, $\ker\varphi \subset \{0\}$, ce qui montre que φ est injective.*
- *Comme E est euclidien, on a $\dim E = \dim E^* < +\infty$.*
- *Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on a $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme}}$. En particulier, φ est bijective donc $\boxed{\forall \psi \in E^*,\ \exists! a \in E \mid \psi = \varphi_a \text{ i.e. } \psi = (a|\cdot)}$, ce qu'il fallait montrer.*

Méthode 2 (analyse-synthèse). *Puisque E est euclidien, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.*
Fixons $\psi \in E^*$.

Analyse. *Soit $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ \psi(x) = (a|x)$.*

Puisque $\mathscr{B}$ est une BON, on écrit $a = \displaystyle\sum_{i=1}^n (a|e_i)e_i = \sum_{i=1}^n \psi(e_i)e_i$, ce qui prouve l'unicité en cas d'existence.

Synthèse. *Posons $a = \displaystyle\sum_{i=1}^n \psi(e_i)e_i$. Alors $a \in E$.*

Montrons que $\psi = (a|\cdot)$ (égalité d'applications linéaires).
Il suffit de montrer que ces applications coïncident sur une base de E, par exemple $\mathscr{B}$.

On a $\forall j \in [\![1, n]\!],\ (a|e_j) = (\sum_{i=1}^{n} \psi(e_i)e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i) \underbrace{(e_i|e_j)}_{=\delta_{i,j}} = \psi(e_j).$

Conclusion : le vecteur a convient bien.

Orthogonalité, projection orthogonale, distance

Exercice 13. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère $F = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 2), (1, -1, 0))$.*

1. *Le vecteur $(2, 2, 0)$ est-il dans $F^\perp$?*
2. *Déterminer $F^\perp$.*

Correction.

1. *Posons $e_1 = (1, 0, 2)$ et $e_2 = (1, -1, 0)$. Remarquons que (e_1, e_2) est une famille libre donc c'est une base de F. Un vecteur $x \in E$ est orthogonal à F s'il est orthogonal à e_1 et à e_2.*
   On a $\langle (2, 2, 0), e_1\rangle = 2 \neq 0$ donc $\boxed{(2, 2, 0) \notin F^\perp}$.

2. *Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :*

$$\begin{aligned} X \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall Y \in F, \langle X, Y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle X, e_1\rangle = 0 \text{ et } \langle X, e_2\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2z = 0 \text{ et } x - y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{F^\perp = \left\{\left(x, x, -\frac{1}{2}x\right),\ x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)\right) = \mathrm{Vect}\,((2, 2, -1))}$ *: droite vectorielle.*

Exercice 14. *Soient E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. *Établir $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.*
2. *On suppose que $F \cap G^\perp = \{0_E\}$ et que $\dim F = \dim G$. Montrer que $F^\perp \cap G = \{0_E\}$.*

Correction.

1. (a) *Procédons par double inclusion.*
   - **Première méthode (ensembliste).** *On a $F \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. D'où $\underline{(F + G)^\perp \subset (F^\perp \cap G^\perp)}$.*
     Deuxième méthode. *Soit $x \in (F + G)^\perp$. Soit $f \in F$.*
     On peut écrire : $f = f + 0_E \in F + G$ donc $\langle x, f\rangle = 0$ d'où $x \in F^\perp$. De même, $x \in G^\perp$, donc $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Ainsi, $\underline{(F + G)^\perp \subset (F^\perp \cap G^\perp)}$.
   - *Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. On a :*

     $$\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ \langle x, f + g\rangle = \langle x, f\rangle + \langle x, g\rangle = 0 + 0 = 0,$$

     donc $x \in (F + G)^\perp$. Ainsi, $\underline{F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp}$.
     Par double inclusion, on a montré que : $\boxed{(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$.

   (b) *On applique la première égalité à $F^\perp$ et $G^\perp$ (qui sont également des ssev de E), on a alors :*

$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$. En passant à l'orthogonal (comme E est euclidien, $F^\perp$, $G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de E), on obtient : $\boxed{F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp}$.

2. *Puisque $F^\perp$ et G sont deux ssev de dimension finie de E, on a d'après la formule de Grassmann :*

$$\dim(F^\perp \cap G) = \dim F^\perp + \dim G - \dim(F^\perp + G).$$

Or, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et d'après la question 1 :

$$F^\perp + G = F^\perp + (G^\perp)^\perp = (F \cap G^\perp)^\perp.$$

D'où $\dim(F^\perp + G) = \dim(F \cap G^\perp)^\perp = \dim E - \dim(F \cap G^\perp) = \dim E - 0 = \dim(E)$, car $F \cap G^\perp = \{0_E\}$.
En remplaçant, il vient :

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp \cap G) &= \dim E - \dim F + \dim G - \dim E \\ &= 0, && \textit{car } \dim F = \dim G \textit{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{F^\perp \cap G = \{0_E\}}$.

Exercice 15. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le vecteur $x = (2,2,2)$ et le sous-espace vectoriel $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - \dfrac{x_2}{2} + x_3 = 0\right\}$.*

1. *Déterminer le projeté orthogonal de x sur F.*
2. *Déterminer la distance de x à F.*

Correction.

1. **Première méthode (à l'aide de $F^\perp$).** $F = \text{Vect}\left((1,2,0),(0,2,1)\right)$ *et*

$$F^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \textit{ et } 2y + z = 0\} = \text{Vect}\left((2,-1,2)\right) = \text{Vect}\left(u\right),$$

où $u = \dfrac{1}{3}(2,-1,2)$ et (u) est une BON de $F^\perp$.
Donc le projeté orthogonal sur $F^\perp$ vaut $\underline{p_{F^\perp}(x) = \langle x, u\rangle\, u = \frac{2}{3}(2,-1,2)}$.
Ainsi, $\boxed{p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x) = (2,2,2) - \dfrac{2}{3}(2,-1,2) = \dfrac{2}{3}(1,4,1)}$.
Deuxième méthode (en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ à F.
$F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1,0,-1)$ et $e_2 = \left(0, 1, \dfrac{1}{2}\right)$. De plus, (e_1, e_2) est une famille libre donc c'est une base de F.
$p_F(x) \in F$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ telsque : $p_F(x) = \alpha e_1 + \beta e_2 = \left(\alpha, \beta, \dfrac{\beta}{2} - \alpha\right)$ d'où

$$x - p_F(x) = \left(2 - \alpha, 2 - \beta, 2 + \alpha - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$x - p_F(x) \in F^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle x - p_F(x), e_1\rangle = 0 \\ \langle x - p_F(x), e_2\rangle = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta}{2} - 2\alpha = 0 \\ 3 + \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{4} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 4\alpha \\ 3 - \frac{9\alpha}{2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{8}{3} \end{array} \right.$$

Ainsi, $\boxed{p_F(x) = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)}$.

Troisième méthode (à l'aide d'une BON). *(e_1, e_2) est une base de F, que l'on peut orthonormaliser avec Gram-Schmidt. On pose $\underline{f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)}$.*

On cherche $g_2 := e_2 - \langle e_2, f_1\rangle f_1 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, e_1\rangle}{2} e_1 = e_2 + \dfrac{1}{4} e_1 = \left(\dfrac{1}{4}, 1, \dfrac{1}{4}\right)$. Et : $\|g_2\| = \sqrt{\dfrac{9}{8}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

On pose $f_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{1}{4}, 1, \dfrac{1}{4}\right) = \underline{\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{2}\right)}$. Dès lors, (f_1, f_2) est une BON de F et

$$\begin{aligned} p_F(x) &= \langle x, f_1\rangle f_1 + \langle x, f_2\rangle f_2 \\ &= 0 + 2\sqrt{2} f_2 \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1, 4, 1). \end{aligned}$$

2. *On en déduit que $x - p_F(x) = \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{2}{3}(2, -1, 2)$ donc $\boxed{\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{9} = 2}$.*

Exercice 16 (Annales khass I.14)**.** *Soit $E = \mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On définit trois fonctions de E par :*

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x^2 \text{ et } f_3(x) = |x|.$$

1. *Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre.*
2. *Montrer qu'en posant, pour tout $(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$ on définit un produit scalaire sur E.*
3. *Déterminer la projection orthogonale de f_3 sur* $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

<u>Correction.</u>

1. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Alors : $\forall x \in [-1, 1]$, $a + bx^2 + c|x| = 0$. Pour $x = 0$, on obtient $a = 0$. Puis, pour $x \in \{1, \frac{1}{2}\}$, on obtient : $b + c = 0$ et $\dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2} = 0$, ce qui implique que $b = c = 0$. Ainsi, $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est une famille libre de } E}$.*
2. *Cf cours.*
3. *On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Déterminons la projection orthogonale de f_3 sur F, que l'on notera $p_F(f_3)$. On sait que $p_F(f_3) \in F$ et $f_3 - p_F(f_3) \in F^\perp$ donc*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid p_F(f_3) = \lambda f_1 + \mu f_2 \text{ et } (p_F(f_3)|f_1) = (f_3|f_1) \text{ et } (p_F(f_3)|f_2) = (f_3|f_2).$$

On cherche donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} \lambda(f_1|f_1) + \mu(f_2|f_1) = (f_3|f_1) \\ \lambda(f_1|f_2) + \mu(f_2|f_2) = (f_3|f_2). \end{array} \right.$

Après calculs, on obtient : $(f_1|f_1) = 2$, $(f_2|f_1) = \dfrac{2}{3}$, $(f_3|f_1) = 1$, $(f_2|f_2) = \dfrac{2}{5}$, et $(f_3|f_2) = \dfrac{1}{2}$, d'où *le système :*

$$\begin{cases} 2\lambda + \dfrac{2}{3}\mu = 1 \\ \dfrac{2}{3}\lambda + \dfrac{2}{5}\mu = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\lambda + 2\mu = 3 \\ 20\lambda + 12\mu = 15. \end{cases}$$

On trouve : $\lambda = \dfrac{3}{16}$ *et* $\mu = \dfrac{15}{16}$. *D'où* $\boxed{p_F(f_3) = \dfrac{3}{16}f_1 + \dfrac{15}{16}f_2}$.

4. *Pour le fun, calculons* $d(f_3, F)$. *On a*

$$\begin{aligned} d(f_3,F)^2 &= \|f_3 - p_F(f_3)\|^2 \\ &= \|f_3\|^2 - \|p_F(f_3)\|^2 && \textit{Pythagore,} \end{aligned}$$

où

$$\|f_3\|^2 = \int_{-1}^{1} |x^2| \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

et

$$\begin{aligned} \|p_F(f_3)\|^2 &= \left\| \frac{3}{16}f_1 + \frac{15}{16}f_2 \right\|^2 \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^2 \underbrace{\|f_1\|^2}_{=2} + 2 \times \frac{3}{16} \times \frac{15}{16} \underbrace{\langle f_1, f_2\rangle}_{=2/3} + \left(\frac{15}{16}\right)^2 \underbrace{\|f_2\|^2}_{=2/5} \\ &= \frac{1}{16^2}(18 + 60 + 90) = \frac{168}{16^2} = \frac{8 \times 3 \times 7}{8 \times 2 \times 16} = \frac{21}{32} \end{aligned}$$

donc

$$d(f_3, F)^2 = \frac{2}{3} - \frac{21}{32} = \frac{64 - 63}{3 \times 32} = \frac{1}{96},$$

donc

$$\boxed{d(f_3, F) = \frac{1}{\sqrt{96}} = \frac{1}{4\sqrt{6}}}.$$

Exercice 17. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f canoniquement associé à* $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

Correction.

- *$A^2 = A$ donc $\underline{f^2 = f}$. Comme $\underline{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$,* $\boxed{f \text{ est donc un projecteur de } \mathbb{R}^3}$.
- *f est donc la projection sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$. Déterminons les éléments caractéristiques de f :*

  D'une part, $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *donc* $\underline{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((1,0,-1))}$.

  D'autre part, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A) \Leftrightarrow x - z = 0$ *donc* $\underline{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,0))}$.
- *Il reste à vérifier que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont orthogonaux. Notons $e_1 = (1,0,-1)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (0,1,0)$. On a :*

  $$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0.$$

  Par bilinéarité du p.s., tout vecteur de $\operatorname{Im}(f)$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Ker}(f)$ d'où $\underline{\operatorname{Ker}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont orthogonaux.}}$

$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est la projection } \textbf{orthogonale} \text{ sur } \operatorname{Vect}((1,0,-1))}$.

Exercice 18. Caractérisation de l'orthogonalité. *Soient E un espace vectoriel préhilbertien et x, y deux vecteurs de E.*
Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction. *La condition nécessaire*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leq \|x+\lambda y\|$$

se reformule

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leq \|x+\lambda y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leq \ \|y\|^2 \lambda^2 \ + \ 2\langle x, y\rangle \lambda$$

que l'on peut voir comme une fonction polynomiale de degré ≤ 2.
$\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons $\langle x, y\rangle = 0$.*
Alors la dernière assertion des équivalences ci-dessus est vraie, puisque l'on a bien

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leq \ \|y\|^2 \lambda^2$$

D'où la condition nécessaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leq \|x+\lambda y\| .$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Supposons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leq \|x+\lambda y\|$.*
Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leq \ \|y\|^2 \lambda^2 \ + \ 2\langle x, y\rangle \lambda.$$

On a donc une hypothèse du type

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leq \ a\lambda^2 + b\lambda$$

et on cherche à montrer que $b = 0$.
Plusieurs façons de conclure.
Conclusion 1. *On peut distinguer le cas $a = 0$ et $a \neq 0$ (dans ce dernier cas, on a une fonction polynomiale de degré exactement 2 qui est positive, donc son discriminant est négatif ou nul, donc $b^2 - 4 \times a \times 0 \leq 0$, donc $b = 0$).*
Conclusion 2. *On peut aussi raisonner par l'absurde, et supposer $b \neq 0$.*
Au voisinage de 0, on a alors (car $b \neq 0$) l'équivalent $a\lambda^2 + b\lambda \sim b\lambda$.
Or $a\lambda^2 + b\lambda$ ne change pas de signe, alors que $b\lambda$ change de signe. D'où la contradiction.

Exercice 19. *Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.*
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Sens direct *Supposons que p soit un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F de E. Soit $x \in E$. On a la décomposition :*

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp},$$

et le théorème de Pythagore donne : $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$, d'où $\boxed{\|p(x)\| \leq \|x\|}$ (inégalité de Bessel).

Sens réciproque *Supposons que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$. On sait déjà que p est un projecteur, c'est donc la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Il s'agit de montrer que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux.*

Méthode 1. *Montrons que $\operatorname{Im} p \subset (\operatorname{Ker} p)^\perp$.*
Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Montrons que $y \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$. En particulier, $y \in E$ et puisque $\operatorname{Ker} p$ est un ssev de dimension finie de E, on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus (\operatorname{Ker} p)^\perp$. On peut donc écrire $y = a + b$, avec $a \in \operatorname{Ker} p$ et $b \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
D'une part, $a \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id})$ donc $y = p(y) = p(a+b) = p(b)$.
D'autre part, d'après Pythagore : $\|y\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.
En combinant ces deux informations, on obtient : $\|p(b)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$. Or, par hypothèse, $\|p(b)\|^2 \leq \|b\|^2$ donc $\|a\|^2 \leq 0$ puis $a = 0$, d'où $y = b \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$. Ainsi, $\operatorname{Im} p \subset (\operatorname{Ker} p)^\perp$, ce qui conclut.

Méthode 1 bis (Laure Teston). *Montrons que $(\operatorname{Ker} p)^\perp = \operatorname{Im} p$, par inclusion et égalité des dimensions.*
On a déjà $E = \operatorname{Ker} p \oplus (\operatorname{Ker} p)^\perp$ (euclidien) et $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ (projecteur). Ainsi, $\dim(\operatorname{Ker} p)^\perp = \dim \operatorname{Im} p$.
Il suffit donc de montrer que $(\operatorname{Ker} p)^\perp \subset \operatorname{Im} p$, pour conclure à l'égalité.
Soit $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
Par définition d'un projecteur, on sait que $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$. En déguisant :

$$\|p(x)\|^2 = \|x - (x - p(x))\|^2,$$

et en utilisant l'orthogonalité des vecteurs x et $x - p(x)$, on a (grâce au théorème de Pythagore) :

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Par ailleurs, on sait par hypothèse que $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, donc

$$\|x - p(x)\|^2 \leq 0$$

puis $x = p(x)$, ce qui assure que $x \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) = \operatorname{Im} p$, et permet de conclure.

Méthode 2. *Notons $F := \operatorname{Im}(p)$ et $G := \operatorname{Ker}(p)$. Montrons que F et G sont orthogonaux.*
Soit $(f, g) \in F \times G$. Alors, par définition de la projection sur F parallèlement à $\operatorname{Ker} p$, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ p(f + \lambda g) = f$. Par hypothèse, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|f\|^2 \leq \|f + \lambda g\|^2.$$

Conclusion 1. *Posons* $\varphi : \lambda \mapsto \|f+\lambda g\|^2 = \lambda^2 \|g\|^2 + 2\langle f, g\rangle \lambda + \|f\|^2$.
L'inégalité précédente se ré-écrit : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(0) \leq \varphi(\lambda)$, *ce qui montre que* φ *est minimale en 0. Comme* φ *est dérivable en 0, on a par condition nécessaire d'extremum (local) que* $\varphi'(0) = 0$, *i.e.* $2\langle f, g\rangle = 0$, *ce qui conclut.*
Conclusion 2. *En utilisant une identité remarquable et en simplifiant, on obtient :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda(f|g) \geq 0.$$

- *Si* $g = 0_E$, *alors on a bien* $(f|g) = 0$.
- *Supposons* $g \neq 0_E$. *Alors la fonction* $\lambda \mapsto \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda(f|g)$ *est polynomiale, de degré 2, et de signe constant, donc son discriminant est négatif. On a donc* $4(f|g)^2 \leq 0$. *Mais, comme* $(f|g)^2 \in \mathbb{R}_+$, *on conclut par antisymétrie que* $(f|g)^2 = 0$ *puis que* $(f|g) = 0$.

Méthode 2bis. *En reprenant les notations précédentes, on a aussi* $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ p(\lambda f + g) = \lambda f$. *En utilisant l'hypothèse, on obtient*

$$\|\lambda f\|^2 \leq \|\lambda f + g\|^2,$$

d'où par identité remarquable et simplifications :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \geq 0.$$

La fonction $\lambda \mapsto 2\lambda\langle f, g\rangle + \|g\|^2$ *est affine et toujours strictement positive, donc son coefficient directeur est nul : d'où* $\langle f, g\rangle = 0$, *ce qui conclut.*

Exercice 20. À propos d'unicité dans Gram-Schmidt. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Soient* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une famille libre de* E *et deux familles orthonormées* $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ *et* $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ *de* E *telles que :*

$$\begin{cases} \forall p \in [\![1,n]\!], & \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_p) \\ \forall p \in [\![1,n]\!], & \langle e_p, f_p\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle e_p, g_p\rangle > 0. \end{cases}$$

Montrer que les familles $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont égales.*

Correction. *Remarquons que, pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$, *l'espace vectoriel* $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ *est de dimension finie égale à* k.
On va montrer que $\forall\, p \in [\![1,n]\!], f_p = g_p$.
Fixons $p \in [\![1,n]\!]$.
Considérons l'espace euclidien $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *dans lequel vivent les* $(f_j)_{1\leq j\leq p}$ *et* $(g_j)_{1\leq j\leq p}$ *car, par hypothèse,* $F = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_p)$.
Comme la famille $\mathcal{F}$ *est orthonormée,* f_p *est orthogonal à tout vecteur* $(f_j)_{1\leq j\leq p}$, *donc est orthogonal à l'hyperplan de* F *suivant :*

$$\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}) = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_{p-1}).$$

Idem pour g_p.
Ainsi, f_p *et* g_p *se retrouvent orthogonaux à l'hyperplan commun* $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1})$ *de* F.
Les vecteurs f_p *et* g_p *appartiennent donc à une même droite vectorielle (l'orthogonal d'un hyperplan est une droite vectorielle en dimension finie), donc ils sont colinéaires.*
Comme ils sont unitaires, on a $f_p = \pm g_p$.
Les conditions $\langle e_p, f_p\rangle > 0$ *et* $\langle e_p, g_p\rangle > 0$ *empêchent le cas* $f_p = -g_p$ *et imposent donc* $f_p = g_p$.

$\boxed{\text{Ainsi, les familles } \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \text{ sont égales}}$.

Exercice 21. *Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ suivant le produit scalaire :*

1. $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
2. $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

Correction.

1. *Notons $e_1 = 1$; $e_2 = X$; $e_3 = X^2$. La famille $(1, X, X^2)$ est libre (famille de polynômes non nuls et à degré échelonnées), donc on peut l'orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt.*
   - $\|e_1\|^2 = 1$ *donc posons* $\boxed{f_1 = 1}$.
   - $(f_1|e_2) = (1|X) = \dfrac{1}{2}$. *Posons* $g_2 = e_2 - (e_2|f_1)f_1 = X - \dfrac{1}{2}$. *Par construction,* $(f_1|g_2) = 0$.
     De plus, $\|g_2\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{12}$ *donc* $\|g_2\| = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$.
     Posons alors $f_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|}$ *i.e.* $\boxed{f_2 = \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)}$. *Dès lors,* $\|f_2\| = 1$.
   - $(e_3|f_1) = (1|X^2) = \dfrac{1}{3}$ *et* $(e_3|f_2) = \sqrt{12}\left((X|X^2) - \dfrac{1}{2}(1|X^2)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$.
     Posons $g_3 = e_3 - (e_3|f_1)f_1 - (e_3|f_2)f_2 = X^2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{12}} \times \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$ *i.e.*
     $\underline{g_3 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}}$. *Par construction* $(f_1|g_3) = 0$ *et* $(f_2|g_3) = 0$.
     On a $\|g_3\|^2 = (X^2 - X + \frac{1}{6}|X^2 - X + \frac{1}{6}) = (X^2|X^2 - X + \frac{1}{6}) - (X|X^2 - X + \frac{1}{6}) + \frac{1}{6}(1|X^2 - X + \frac{1}{6}) = \dfrac{1}{180} + 0 + 0$ *donc* $\|g_3\| = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$. *Posons alors* $\boxed{f_3 = \dfrac{g_3}{\|g_3\|} = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right)}$.

   $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est une BON de } \mathbb{R}_2[X] \text{ pour le produit scalaire considéré}}$.

2. *Notons $e_1 = 1$; $e_2 = X$; $e_3 = X^2$. La famille $(1, X, X^2)$ est libre (famille de polynômes non nuls et à degré échelonnées), donc on peut l'orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt.*
   - $\|e_1\| = 1$ *donc posons* $\boxed{f_1 = 1}$.
   - $(e_2|f_1) = (1|X) = -1$. *Posons* $g_2 = e_2 - (e_2|f_1)f_1 = X + 1$. *Dès lors,* $(f_1|g_2) = 0$.
     $\|g_2\| = 1$. *Donc* $\boxed{f_2 = X + 1}$.
   - $(e_3|f_1) = (1|X^2) = 1$ *et* $(e_3|f_1) = (X + 1|X^2) = 0$.
     Posons $g_3 = e_3 - (e_3|f_1)f_1 - (e_3|f_2)f_2 = X^2 - 1 \times 1 - 0 = X^2 - 1$.
     Dès lors, $(f_1|g_3) = 0$ *et* $(f_2|g_3) = 0$.
     $\|g_3\|^2 = 4$ *donc* $\|g_3\| = 2$ *d'où on pose* $\boxed{f_3 = \dfrac{1}{2}(X^2 - 1)}$.

   $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est orthonormale pour le produit scalaire considéré}}$.
   Remarque : $(\cdot|\cdot)$ *est bien un produit scalaire. Le seul point non évident est pour montrer qu'il est défini. Si* $(P|P) = 0$ *alors* $P(-1) = P'(0) = P''(0) = 0$. *Et comme* $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = aX^2 + bX + c$.

Or, $P'(0) = P''(0) = 0$ impliquent que $a = b = 0$. Dès lors, $P = c$. Puis, $P(-1) = 0$ donne $c = 0$. Ainsi, $P = 0$ donc $(\cdot|\cdot)$ est défini.

Exercice 22. *On considère* $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t=0,\ x-y+z-t=0\right\}$.

1. *Déterminer une base et la dimension de F.*
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.*

Correction.

1. *Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.*

$$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ 2y+2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ y+t=0 \end{array}\right.$$

D'où $F = \{(x,y,-x,-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)$, avec $e_1 = (1,0,-1,0)$ et $e_2 = (0,1,0,-1)$. La famille (e_1,e_2) est clairement une famille libre de $\mathbb{R}^4$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et $\boxed{\dim(F) = 2}$.

2.
   - *Orthonormalisons (e_1,e_2) pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.*
     Remarquons que $(e_1|e_2) = 0$, donc il suffit de normaliser les vecteurs e_1 et e_2 donc avoir une BON.
     On a : $\|e_1\| = \|e_2\| = \sqrt{2}$ donc on pose $f_1 := \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$.
     Dès lors, $\boxed{\text{la famille } (f_1,f_2) \text{ est une BON de } F}$.
   - *Notons $\mathscr{B} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et p_F la projection orthogonale sur F. On calcule :*
     $p_F(\varepsilon_1) = (\varepsilon_1|f_1)f_1 + (\varepsilon_1|f_2)f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}f_1 + 0 = \dfrac{1}{2}(1,0,-1,0)$.
     $p_F(\varepsilon_2) = (\varepsilon_2|f_1)f_1 + (\varepsilon_2|f_2)f_2 = 0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}f_2 = \dfrac{1}{2}(0,1,0,-1)$.
     $p_F(\varepsilon_3) = (\varepsilon_3|f_1)f_1 + (\varepsilon_3|f_2)f_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}f_1 + 0 = \dfrac{1}{2}(-1,0,1,0)$.
     $p_F(\varepsilon_4) = (\varepsilon_4|f_1)f_1 + (\varepsilon_4|f_2)f_2 = 0 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}f_2 = \dfrac{1}{2}(0,-1,0,1)$.
   - *Ainsi, la matrice de p_F dans la base canonique $\mathscr{B}$ est* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A}$.

Vérification. $A^2 = A$ *i.e.* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F)$ *car $p_F \circ p_F = p_F$ vu que p_F est un projecteur.*
Remarque. $\mathrm{rg} A = 2$, *donc* $\dim \mathrm{Ker} A = 2$. *On a* $\mathrm{Im} A = \mathrm{Vect}\,(C_1,\ldots,C_4) = \mathrm{Vect}\,(C_1,C_2)$ *et* $\mathrm{Im}(p_F) = F = \mathrm{Vect}\,((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$ *et* $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker}(p_F) = F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1),(1,-1,1,-1))$ *(conséquence de la définition de F).*

Exercice 23. *On souhaite déterminer* $m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x-(a\sin(x)+b\cos(x)))^2\,\mathrm{d}x.$

1. *Justifier que m existe et que $m\in\mathbb{R}$.*
2. *On note $F = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.*
   (a) *Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.*
   (b) *Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire $(f|g)=\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$.*
   (c) *On note $\mathrm{Id} : \begin{array}{ccc}[0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\end{array}$. Quel est le lien entre Id, F et m ?*
3. *En déduire la valeur de m.*

Correction.

1. $m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I_{a,b} = \inf\Delta$ *où* $\Delta = \{I_{a,b}\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ *est une partie non vide ($I_{0,0}\in\Delta$) et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc Δ admet une borne inférieure réelle d'où* $\boxed{m \text{ existe et } m\in\mathbb{R}}$.

2. (a) $\cos,\sin\in\mathscr{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ *et* $(\cos,\sin)$ *est une famille libre (prendre des valeurs de x particulières) donc $(\cos,\sin)$ est une base de F et* $\boxed{F \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev de dimension } 2}$.
   (b)
   - *Comme remarqué en cours, les vecteurs $\cos$ et $\sin$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire. Il suffit juste les normaliser, pour obtenir une BON.*
   - $\|\cos\|^2 = \int_0^\pi \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2x))\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$. *Posons* $\boxed{f_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos}$.
   - $\|\sin\|^2 = \int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (1-\cos^2(x))\mathrm{d}x = \pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ *donc posons* $\boxed{f_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin}$.
   - *Ainsi,* $\boxed{(f_1,f_2) \text{ est une BON de } F}$.

   (c) $\boxed{m = \inf_{f\in F}\|\mathrm{Id}-f\|^2 \underset{*}{=} \left(\inf_{f\in F}\|\mathrm{Id}-f\|\right)^2 = d(\mathrm{Id},F)^2 = \|\mathrm{Id}-p_F(\mathrm{Id})\|^2 = \|\mathrm{Id}\|^2-\|p_F(\mathrm{Id})\|^2}$.

   On justifie $*$ par le fait que pour une partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}_+$, on a : $\inf(A^2)=\inf(A)^2$. *En effet :*
   - *D'une part,* $\forall a\in A,\ 0\le \inf A\le a$ *donc* $(\inf A)^2\le a^2$ *donc A^2 est minorée et sa bornée inférieure est le plus grand de ses minorants d'où* $(\inf A)^2\le\inf(A^2)$.
   - *D'autre part,* $\forall a\in A,\ 0\le\inf(A^2)\le a^2$ *donc* $\sqrt{\inf(A^2)}\le a$ *d'où* $\sqrt{\inf(A^2)}\le\inf A$ *puis* $\inf(A^2)\le(\inf A)^2$.

   D'où l'égalité.

3. *Commençons par quelques calculs préliminaires :*
   - *Une IPP donne :* $(\mathrm{Id}|\cos) = \int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 0+[\cos x]_0^\pi = -2.$
   - *une IPP donne :* $(\mathrm{Id}|\sin) = \int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos = \pi + [\sin]_0^\pi = \pi.$

Méthode 1. *(f_1, f_2) est une BON de F donc*

$$\begin{aligned} p_F(\mathrm{Id}) &= (\mathrm{Id}|f_1)f_1 + (\mathrm{Id}|f_2)f_2 \\ &= \frac{(\mathrm{Id}|\cos)}{\|\cos\|^2}\cos + \frac{(\mathrm{Id}|\sin)}{\|\sin\|^2}\sin, \end{aligned}$$

où $(\mathrm{Id}|\cos) = -2$ *et* $(\mathrm{Id}|\sin) = \pi$ *donc* $p_F(\mathrm{Id}) = -2 \times \dfrac{2}{\pi}\cos + \pi \times \dfrac{2}{\pi}\sin$.

Ainsi, $\boxed{p_F(\mathrm{Id}) = 2\sin - \dfrac{4}{\pi}\cos}$. *Remarque : il est clair que* $p_F(\mathrm{Id}) \in F$.

Méthode 2. $p_F(\mathrm{Id}) \in F$ *donc il existe* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que*

$$p_F(\mathrm{Id}) = a\cos + b\sin.$$

Comme $\mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id}) \in F$, *on sait que* $\begin{cases} \langle \mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id}), \cos\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id}), \sin\rangle = 0. \end{cases}$ *Or,*

$$\langle \mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id}), \cos\rangle = \langle \mathrm{Id} - a\cos - b\sin, \cos\rangle = \underbrace{\langle \mathrm{Id}, \cos\rangle}_{=-2} - a\underbrace{\|\cos\|^2}_{=\pi/2} - b\underbrace{\langle \sin, \cos\rangle}_{=0} = -2 - a\frac{\pi}{2},$$

d'où $\boxed{a = -\dfrac{\pi}{4}}$, *et*

$$\langle \mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id}), \sin\rangle = \langle \mathrm{Id} - a\cos - b\sin, \sin\rangle = \underbrace{\langle \mathrm{Id}, \sin\rangle}_{=\pi} - a\underbrace{\langle \cos, \sin\rangle}_{=0} - b\underbrace{\|\sin\|^2}_{=\pi/2} = \pi - b\frac{\pi}{2},$$

d'où $\boxed{b = 2}$.

4.
- $m = \|\mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id})\|^2 = \|\mathrm{Id}\|^2 - \|p_F(\mathrm{Id})\|^2$, *d'après le théorème de Pythagore.*
- *Or,* $\|\mathrm{Id}\|^2 = \dfrac{\pi^3}{3}$.
- *Et,* $\|p_F(\mathrm{Id})\|^2 = (\mathrm{Id}|f_1)^2 + (\mathrm{Id}|f_2)^2$ *car* (f_1, f_2) *est une BON. Donc*

$$\|p_F(\mathrm{Id})\|^2 = \frac{(\mathrm{Id}|\cos)^2}{\|\cos\|^2} + \frac{(\mathrm{Id}|\sin)^2}{\|\sin\|^2} = \frac{2}{\pi}((-2)^2 + \pi^2) = \frac{8}{\pi} + 2\pi.$$

- *Ainsi,* $\boxed{m = \dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{8}{\pi} - 2\pi}$ *donc* $\boxed{m = \dfrac{\pi^4 - 6\pi^2 - 24}{3\pi}}$.