Calcul d'intégrales

Exercice 1. Primitives. *Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.*

1. *Par calcul direct :* $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$, $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$, $t \mapsto \tan(t)$, $t \mapsto \dfrac{1}{2t^2+t+1}$.

   - $\boxed{\text{Une primitive de } t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \dfrac{1}{2}\ln^2}$.
   - $\boxed{\text{Une primitive de } \dfrac{\sin}{1+\cos^2} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } -\arctan \circ \cos}$.
   - *Pour* $k \in \mathbb{Z}$, *on pose* $I_k := \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$. $\tan$ *est définie et continue sur* $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$.

     $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{Z}, \text{ une primitive de } \tan \text{ sur } I_k \text{ est } t \mapsto -\ln|\cos(t)|}$.
   - $\boxed{\text{Une primitive de } t \mapsto \dfrac{1}{2t^2+t+1} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } t \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}}t+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)}$.

2. *Par intégration par parties :* $t \mapsto \left(1-t^2\right)e^{-t}$, $t \mapsto \arccos(t)$.

   - $\boxed{\text{Une primitive de } t \mapsto \left(1-t^2\right)e^{-t} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } t \mapsto (t+1)^2 e^{-t}}$.
   - $\boxed{\text{Une primitive de } \arccos \text{ sur }]-1,1[\text{ est } t \mapsto t\arccos t - \sqrt{1-t^2}}$.

3. *Par changement de variable :* $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t+t\left(\ln(t)\right)^2}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$.

$\boxed{\text{Une primitive de } t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t+t\left(\ln(t)\right)^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(1+(\ln x)^2\right)}$ *(chgt de variable* $u = \ln t$*).*

$\boxed{\text{Une primitive de } t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } x \mapsto 2\arctan(\sqrt{x})}$ *(chgt de variable* $u = \sqrt{t}$*).*

Exercice 2. Calcul d'intégrales. *Calculer les intégrales suivantes.*

1. $\displaystyle\int_2^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)}}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{3t^2-3t-6}$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Correction.

1. $\boxed{\displaystyle\int_2^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)}} = \left[2\sqrt{\ln t}\right]_2^e = 2\left(1-(\ln 2)^{1/2}\right)}$ *(ou bien chgt de variable $u=\ln t$).*

2. *Soit $t\in\mathbb{R}$. On écrit :* $3t^2-3t-6 = 3(t+1)(t-2)$ *et* $1 = \frac{1}{3}\left((t+1)-(t-2)\right)$
donc $\displaystyle\frac{1}{3t^2-3t-6} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+1}\right)$. *Puis,*
$$\boxed{\int_{-1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{3t^2-3t-6} = \frac{1}{9}\left[\ln|t-2|-\ln|t+1|\right]_{-1/2}^1 = \frac{1}{9}\left(-\ln(2)-\ln(5/2)+\ln(1/2)\right) = \frac{1}{9}\ln\frac{2}{2\times5\times2} = -\frac{\ln 10}{9}}.$$

3. *Linéarisation. D'après la formule d'Euler, pour tout $t\in\mathbb{R}$:*
$$\begin{aligned}\sin^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}\right) = \frac{-1}{8i}\left(2i\sin(3t)-6i\sin(t)\right)\\ &= -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin t.\end{aligned}$$
Puis, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^{\pi/2}+\frac{3}{4}\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{12}+\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$. *Ainsi,* $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}}$.

4.
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}\mathrm{d}t &= \frac{-1}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\frac{-\frac{\sin(t)}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$
Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$.

5. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\int_0^1(1-t^2)^{1/2}(-2t)\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\left[\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$.
Sinon, le chgt de variables $u=t^2$ donne aussi : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}}$.

Détermination de limites

Exercice 3. Sommes de Riemann. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \qquad U_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} \qquad W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}.$$

Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et déterminer leur limite.

Correction.

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2n}\right)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *où* $f : t \mapsto \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}} \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

   Donc $S_n \to \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}}\mathrm{d}t = \left[\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$. $\boxed{S_n \to \frac{\pi}{6}}$.

2. $T_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *avec* $f : t \mapsto t\ln(1+t) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *Donc* $T_n \to \displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)\mathrm{d}t$.

   Une IPP avec $u : t \mapsto \dfrac{t^2}{2}$ *et* $v : t \mapsto \ln(1+t)$ *qui sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *donne :*

   $\displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t.$

   Or, $\dfrac{t^2}{1+t} = \dfrac{t^2 - 1 + 1}{1+t} = \dfrac{(t-1)(t+1) - 1}{1+t} = t - 1 + \dfrac{1}{1+t}$.

   Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-1)^2}{2} + \ln[1+t|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2.$

   Finalement, $\displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1}{4}$ *i.e.* $\boxed{T_n \to \frac{1}{4}}$.

3. *Étudions la suite* $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :*

   $\ln(U_n) = \displaystyle\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n \times n \times \cdots \times n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$

   On reconnait une somme de Riemann :

   - *de* $t \mapsto \ln(1+t) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, *ou bien*
   - *de* $\ln \in \mathscr{C}^0([1,2],\mathbb{R})$.

   Dans tous les cas, par théorème, on sait que la suite $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et sa limite (quitte à faire le changement de variables* $u = 1+t$, *où* $t \mapsto \mathscr{C}^1$*) vaut*

   $$\int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(u)\mathrm{d}u = [u\ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - \ln e = \ln\frac{4}{e}.$$

   Ainsi, $\ln(U_n) \to \ln\dfrac{4}{e}$.

   Enfin, par continuité de l'exponentielle réelle, on obtient $\boxed{U_n \to \frac{4}{e}.}$

4. $W_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *avec* $f : x \mapsto 2^x \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *et* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x\ln 2}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2}\right]_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} W_n = \dfrac{1}{\ln 2}}$.

Exercice 4. *On souhaite déterminer la limite éventuelle de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1}$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)+2} \leq u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)}$.
2. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)} = \frac{\ln 2}{2}$.
3. *Conclure.*

Correction.

1. *En faisant le changement d'indice* $\ell = k-n$, *on trouve que* $u_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{2(\ell+n)+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)+1}$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $0 < 2(k+n) \leq 2(k+n)+1 \leq 2(k+n)+2$. *La fonction inverse étant décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a bien :* $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{1}{2(k+n)+2} \leq \dfrac{1}{2(k+n)+1} \leq \dfrac{1}{2(k+n)}$. *Ensuite, en sommant ces inégalités entre* 0 *et* n, *il s'ensuit que*
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)+2} \leq u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)}}.$$

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Notons* $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)}$. *On a*
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n(\frac{k}{n}+1)} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{2n}.(*)$$
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *est continue sur* $[0,1]$, *donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann :*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2).$$
Puisque $\dfrac{1}{2n} \to 0$, *on déduit de* $(*)$ *que*
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)} = \frac{\ln 2}{2} + 0 = \frac{\ln 2}{2}}.$$

3. En faisant le changement d'indice $\ell = k+1$, on trouve que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)+2} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{2(\ell+n)} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2(\ell+n)} + \frac{1}{4n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2} + 0,$$

d'après la question précédente.

Sinon : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n)+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+n+1)} = v_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2} - 0.$

D'après l'encadrement de la question 1. et par théorème d'encadrement, on en déduit que (u_n) converge et $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}}$.

Exercice 5. *Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = ((n+1)(n+2)\dots(n+n))^{1/n}$. Déterminer un équivalent de u_n.*

Correction. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right).$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = n\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Ainsi,

$$u_n = \exp\left(\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = n\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$$

Or, la fonction $\begin{cases} \ln \text{ étant continue sur } [1,2] \\ x \mapsto \ln(1+x) \text{ étant continue sur } [0,1] \end{cases}$, *il suit du résultat de convergence sur les sommes de Riemann que*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \displaystyle\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t, \\ \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

où

$$\int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = [u\ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - \ln e = \ln\frac{4}{e}.$$

Par continuité de la fonction $\exp$ *en* $\ln\frac{4}{e}$, *on en déduit que*

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\ln\frac{4}{e}) = \frac{4}{e} \neq 0.$$

Finalement, on obtient que $\boxed{u_n \sim \frac{4}{e}n}$.

Exercice 6. Intégrale type Césaro. *Soient $L \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ tels que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = L$.*

Correction.

- *Pour $x > 0$, on pose $F(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et on écrit $|F(x)-L| = \frac{1}{x}\left|\int_0^x (f-L)\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-L|\,\mathrm{d}t$.*
- *Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ donc il existe $A > 0$ tel que : $\forall t \geq A, |f(t)-L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.*
- *Pour $x > A$, et en utilisant la relation de Chasles, on a :*

$$\begin{aligned}
|F(x)-L| &\leq \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-L|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x |f(t)-L|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_A^x \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t \qquad \text{où } K := \int_0^A |f-L| \text{ et en utilisant la croissance de l'intégrale} \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{car } 0 < \frac{x-A}{x} < 1.
\end{aligned}$$

- *Or, $\frac{K}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc il existe $B > 0$ tel que : $\forall x \geq B, \frac{K}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.*
- *Posons $C = \max(A,B)$. Dès lors : $\forall x \geq C$, $|F(x)-L| \leq \varepsilon$ d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = L.}$*

Exercice 7. Lemme de Riemann-Lebesgue (HP). *Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$I_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide une IPP (avec $u = f$ et $v : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$ toutes deux de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$), on trouve que :*

$$\begin{aligned} I_n &= \left[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)\right) - \int_a^b f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

- *Idée : On montrons que $\lim I_n = 0$ en majorant (I_n) par une suite qui tend vers 0.*
- *En appliquant l'inégalité triangulaire, il vient :*

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \frac{1}{n}|f(b)\sin(nb)| + \frac{1}{n}|f(a)\sin(na)| + \left|\int_a^b f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{|f(b)|}{n} + \frac{|f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)||\sin(nx)|\mathrm{d}x && \text{car } |\sin| \leq 1,\ a<b, \text{ et } \left|\int_a^b h\right| \leq \int_a^b |h| \\ &\leq \frac{|f(a)|}{n} + \frac{|f(b)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x && \text{car } |\sin| \leq 1 \text{ et } a<b \\ &= \frac{K}{n}, && \text{où } K := |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

- *Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |I_n| \leq \dfrac{K}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{K}{n} = 0$ donc par théorème d'encadrement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.*
- **Remarque** *: on montrerait de la même manière que $J_n := \displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \to 0$, et on pourrait aussi en déduire que $K_n := \displaystyle\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x \to 0$ en écrivant $K_n = I_n + iJ_n$.*

Exercice 8. Fonction définie par une intégrale. *Soit* $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. *Justifier rapidement que* Ψ *est définie sur* $\mathbb{R}^*$.
2. *Montrer que* Ψ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et déterminer* Ψ'.
3. *À l'aide d'un encadrement de la fonction intégrée, déterminer la limite de* Ψ *en* 0.

Correction.

1. *La fonction intégrée* $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^*$.
   On cherche les $x \in \mathbb{R}$ *tels que*
   $$\begin{cases} \widehat{[x, 2x]} \subset \,]-\infty, 0[\\ \text{ou} \\ \widehat{[x, 2x]} \subset \,]0, +\infty[\end{cases},$$
   ce qui équivaut à $x < 0$ *ou* $x > 0$.
   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } \Psi \text{ est } D = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[= \mathbb{R}^*}$.

2. **Alternative (1 et 2 en même temps).** *La fonction* $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ *étant dérivable sur* $\mathbb{R}^*$, *elle admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $\mathbb{R}^*$ *(prenons par exemple* $I = \mathbb{R}_+^*$ *et* $I = \mathbb{R}_-^*$*).*
   Soit F *l'une d'elles.*
   Alors, $\Psi : x \mapsto F(2x) - F(x)$.
   En tant que primitive de fonction continue, F *est de de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I, *donc par composition et différence,* Ψ *est également de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I, *pour* $I = \mathbb{R}_+^*$ *et* $I = \mathbb{R}_-^*$ *sans restriction.*
   Donc $\boxed{\Psi \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*, \text{ et } \Psi' : x \mapsto 2F'(2x) - F'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}}$.

3. *Déterminons la limite de* Ψ *en* 0.
   $\triangleright$ *On commence par déterminer la limite en* 0^+.
   Montrons que
   $$\forall\, x > 0, \quad e^x \ln 2 \;\leq\; \Psi(x) \;\leq\; e^{2x} \ln 2.$$
   On pourra en déduire, d'après le théorème des gendarmes que $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \Psi(x) = \ln 2}$.

   Fixons $x > 0$.

   On a
   $$\forall\, t \in [x, 2x], \quad \frac{e^x}{t} \;\leq\; \frac{e^t}{t} \;\leq\; \frac{e^{2x}}{t}.$$
   Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on a
   $$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\mathrm{d}t \;\leq\; \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \;\leq\; \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\underbrace{e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=\ln 2} \;\leq\; \underbrace{\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t}_{=\Psi(x)} \;\leq\; \underbrace{e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=\ln 2}.$$

▷ *On établit de la même manière que*

$$\forall\, x < 0, \quad e^{2x}\ln 2 \;\leq\; \Psi(x) \;\leq\; e^x \ln 2$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} \Psi(x) = \ln 2}$.

▷ $\boxed{\textit{Ces deux points montrent que la limite de } \Psi \textit{ en } 0 \textit{ existe et vaut } \ln 2}$.

Exercice 9. Intuition, puis preuve rigoureuse. *Soit* $\varphi : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\mathrm{d}t$. *Montrer que* φ *admet une limite finie en* 0 *et la déterminer.*

Correction.

- ***En 0***. *On a* $\varphi(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
- ***Limite en*** $\mathbf{0^+}$.
  Soit $x > 0$. *La fonction* $t \mapsto e^{-x\sin t}$ *est décroissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *(on utilise la positivité de* x*).*
  D'où
  $$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \underbrace{e^{-x\sin\frac{\pi}{2}}}_{=e^{-x}} \;\leq\; e^{-x\sin t} \;\leq\; \underbrace{e^{-x\sin 0}}_{=1}.$$
  Par croissance de l'intégrale, on obtient
  $$\frac{\pi}{2}e^{-x} \;\leq\; \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\mathrm{d}t}_{\varphi(x)} \;\leq\; \frac{\pi}{2}.$$
  Le théorème des gendarmes assure l'existence de la limite et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}}$.
- ***Limite en*** $\mathbf{0^-}$. *Ce cas se traite de la même manière. On obtient* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}}$.

Les limites en 0^+ *et en* 0^- *coïncident et valent* $\varphi(0)$, *d'où l'existence de la limite en* 0 *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}}$.

Exercice 10. Intégrale de $t^n f(t)$: limites. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.*

1. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *ou encore* $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = o(1)$.
2. *En fait, montrer que* $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$.
3. *Soit $\delta \in]0,1]$. Montrer que* $\displaystyle\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

Correction.

1. *Notons $K = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, ce qui est licite, car f est continue sur le segment $[0,1]$.*
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t\Big| &\leq \int_0^1 \Big|t^n f(t)\Big|\ \mathrm{d}t && \textit{inég. triangulaire}\\
&\leq \int_0^1 t^n \Big|f(t)\Big|\ \mathrm{d}t && \textit{à vous}\\
&\leq K\int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t && \textit{définition de } K\textit{, et croissance de l'intégrale}\\
&\leq K\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

   Le membre droit tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

2. *Les calculs de la question précédente montrent que*

$$\Big|\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t\Big| \ \leq\ K\frac{1}{n+1} \qquad \textit{où } K = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|,$$

   ce qui est exactement la définition de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$.

   Et comme $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$, on a aussi

$$\boxed{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)}.$$

   Remarque. *Le « en fait » dans la question s'explique par le fait que l'on peut retrouver le résultat de la première question.*

   En effet, comme $\dfrac{1}{n} = o(1)$, un grand O de $\dfrac{1}{n}$ est un $o(1)$, d'où $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = o(1)$.

3. *Montrons que* $\displaystyle\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{n}\Big)$ *c'est-à-dire* $\displaystyle\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| &\le \int_0^{1-\delta} nt^n |f(t)|\,\mathrm{d}t && \text{par inég. triangulaire}\\ &\le K\int_0^{1-\delta} nt^n\,\mathrm{d}t && \text{où } K=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^{1-\delta} nt^n\,\mathrm{d}t \;=\; \Big[\frac{n}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^{1-\delta} \;=\; \frac{n}{n+1}(1-\delta)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } 1-\delta\in[0,1[$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\displaystyle\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Autre façon de présenter la preuve. *On a*

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| &\le \int_0^{1-\delta} t^n |f(t)|\,\mathrm{d}t && \text{par inég. triangulaire}\\ &\le \max_{[0,1]}|f(t)|\ \underbrace{\int_0^{1-\delta} t^n\,\mathrm{d}t} && \text{car } f \text{ est continue}\\ &= \frac{1}{n+1}(1-\delta)^{n+1} && \text{calcul}\\ &= o\Big(\frac{1}{n}\Big) && \text{car } (1-\delta)^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Big|\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; \text{quelque chose qui est un } o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Donc (pourquoi ?)

$$\boxed{\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; o\Big(\frac{1}{n}\Big)}.$$

Exercice 11. Intégrale de $t^n f(t)$: DA à 1 terme. *Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. On veut montrer que*

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n} \;+\; o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

1. *Prouver le résultat dans le cas où f est supposée de classe $\mathscr{C}^1$.*
2. *On suppose ici seulement f continue et on suppose que $f(1)=0$.*
   (a) *On fixe $\varepsilon>0$.*
   Montrer qu'il existe $\delta\in]0,1]$ tel que

   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \Big|\int_{1-\delta}^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Pour ce δ, montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n\ge n_0,\quad \Big|\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; \varepsilon.$$

(b) *Conclure.*

3. *Prouver le résultat annoncé.*

Correction.

1. *On suppose f classe $\mathscr{C}^1$.*

Étape 1. Un calcul exact à n fixé.

On pose $u : t \mapsto \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ et $v = f$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \Big[\frac{1}{n+1} t^{n+1} f(t)\Big]_0^1 \;-\; \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n+1} \;-\; \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t \qquad (\clubsuit)$$

Étape 2. Un calcul asymptotique.

Montrons que $\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Comme f' est continue (car f est de classe $\mathscr{C}^1$), on a (à détailler) :

$$\Big|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t\Big| \;\leq\; \max_{[0,1]}|f'| \underbrace{\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{n+2}}.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = o(1)$.

En multipliant par $\frac{1}{n+1}$, on a alors $\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$.

Comme $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on a aussi

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Grâce à ($\clubsuit$), on en déduit

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n+1} \;+\; o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

On termine en faisant apparaître $\frac{f(1)}{n}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n} \;+\; \Big(\frac{f(1)}{n+1} - \frac{f(1)}{n}\Big) \;+\; o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

et en constatant que $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$, *qui vaut* $\dfrac{-1}{n(n+1)}$, *est négligeable devant* $\dfrac{1}{n}$.
Ainsi,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n} \;+\; o\Big(\frac{1}{n}\Big) \;+\; o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

d'où le résultat.

2. (a) *On fixe* $\varepsilon > 0$.
   - **Première étape : existence de δ.**
   Comme f *est continue en* 1, *il existe* $\delta' > 0$, *tel que*

$$\forall\, t \in [1-\delta', 1+\delta'] \cap [0,1], \quad \big|f(t) - \underbrace{f(1)}_{=0}\big| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

   En posant $\delta = \min(\delta', 1)$, *on a*

$$\forall\, t \in [1-\delta, 1], \quad |f(t)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Big|\int_{1-\delta}^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| &\leq \int_{1-\delta}^1 nt^n |f(t)|\,\mathrm{d}t && \textit{inég. triangulaire (avec des bornes ordonnées)} \\ &\leq \int_{1-\delta}^1 nt^n \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t && \textit{inég. précédente et croissance de l'intégrale} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\delta}^1 nt^n \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

   Or

$$\int_{1-\delta}^1 nt^n \mathrm{d}t \;=\; \Big[\frac{n}{n+1}t^{n+1}\Big]_{1-\delta}^1 \;=\; \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leq 1}\;\underbrace{\Big(1-(1-\delta)^{n+1}\Big)}_{\leq 1} \;\leq\; 1.$$

   Ainsi, on a montré qu'il existe $\delta > 0$ *tel que*

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Big|\int_{1-\delta}^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}}.$$

   - **Deuxième étape : existence de n_0.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$. *D'après la relation de Chasles, on a*

$$\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{1-\delta}^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Par inégalité triangulaire, on a

$$\Big|\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\leq\; \Big|\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;+\; \Big|\int_{1-\delta}^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Grâce à la première étape, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \left|\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\diamondsuit)$$

Or d'après l'exercice 10 (qu'il faut savoir refaire), on sait que $\left|\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par définition epsilonesque de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

En reprenant $(\diamondsuit)$*, on obtient ce qu'il fallait prouver :*

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad \left|\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \varepsilon}.$$

(b) À la question précédente, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \left|\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \varepsilon.$$

Autrement dit, comme $f(1) = 0$*, on a montré*

$$\boxed{\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)}.$$

3. *On se ramène à une fonction* g *continue telle que* $g(1) = 0$ *en posant* $g : x \mapsto f(x) - f(1)$.
La question précédente montre alors que

$$\int_0^1 nt^n g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a

$$\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nt^n g(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^1 nt^n f(1)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f(t) = g(t) + f(1)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 nt^n g(t)\,\mathrm{d}t}_{\to 0} \;+\; f(1) \underbrace{\int_0^1 nt^n\,\mathrm{d}t}_{=\frac{n}{n+1}\to 1}.$$

Par somme de limites, on a

$$\boxed{\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)}.$$

Formules de Taylor

Exercice 12. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3\,(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Indication : *on pourra penser à la formule de Taylor avec reste intégral.*

Correction. *Notons* $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *et fixons* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On reconnaît que* $\ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ *est le reste de Taylor de* f *en* 0 *à l'ordre 2. Puisque* $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, *on sait d'après la formule de Taylor avec reste intégral que ce reste est de la forme :*

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \mathrm{d}t.$$

Montrer la double inégalité revient montrer cet encadrement pour le reste intégral :

$$\frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \mathrm{d}t \leq \frac{x^3}{3}.$$

On a : $0 \leq t \leq x$ *donc* $1 \leq (1+t)^3 \leq (1+x)^3$. *Par décroissance de la fonction inverse sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et puisque* $(x-t)^2 \geq 0$, *on obtient*

$$\frac{(x-t)^2}{(1+x)^3} \leq \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \leq (x-t)^2.$$

Puis, par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, x]$, *il vient :*

$$\frac{1}{(1+x)^3} \times \int_0^x (x-t)^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \mathrm{d}t \leq \int_0^x (x-t)^2 \mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^x (t-x)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x)^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$ *donc*

$$\frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \mathrm{d}t \leq \frac{x^3}{3}, \quad \boxed{\text{ce qui conclut}}.$$

Exercice 13. Taylor-Young. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^3(I, \mathbb{C})$ *et* $a \in I$. *Déterminer*

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{1}{h^3} \left(f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\right).$$

Correction.

- *Posons* $g : h \mapsto \dfrac{1}{h^3}\left[f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\right]$. *La fonction* g *est définie sur un voisinage de 0, privé de 0, que l'on notera* V.
- *D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 :* $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{h^2}{2} f''(a) + \dfrac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + o(h^3)$.

- *Ainsi, au voisinage de 0,*

$$\begin{aligned} h^3 g(h) &= f(a) + 3hf'(a) + \frac{(3h)^2}{2} f''(a) + \frac{(3h)^3}{3!} f^{(3)}(a) + o(h^3) - f(a) \\ &\quad - 3\left(f(a) + 2hf'(a) + \frac{(2h)^2}{2} f''(a) + \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(a) + o(h^3) \right) \\ &\quad + 3\left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + o(h^3) \right) \\ &= h^3 f^{(3)}(a) + o(h^3). \end{aligned}$$

- *D'où* $\underline{g(h) = f^{(3)}(a) + o(1)}$. *Puis,* $\boxed{\lim_{h\to 0, h\neq 0} g(h) = f^{(3)}(a)}$.

- *Remarque. On peut aussi rédiger avec des sommes. En écrivant :*

$$f(a) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} 0^k + o(h^3)$$

et

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^3) \\ f(a+2h) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (2h)^k + o(h^3) \\ f(a+3h) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (3h)^k + o(h^3) \end{aligned}$$

et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned} f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \left[(3h)^k - 3 \times (2h)^k + 3h^k + 0^k \right] + o(h^3) \\ &= (1 - 3 + 3 - 1) f(a) + f'(a) h (3 - 3\times 2 + 3 - 0) \\ &\quad + \frac{f''(a)}{2} h^2 (3^2 - 3 \times 2^2 + 3 - 0) \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} h^3 (3^3 - 3\times 2^3 + 3 - 0) + o(h^3) \\ &= f^{(3)}(a) h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

Même conclusion.

Exercice 14. *On note f l'application définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$.*

1. *Expliciter $f^{(n)}(x)$, pour tout réel $x\in]-1,+\infty[$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.*
2. *Déterminer $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(n)}(x)\right|$, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.*
3. *A l'aide d'une formule de Taylor, démontrer que $\forall x\in[0,1],\ \ln(1+x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$.*

Correction.

1. *La fonction $f : x\mapsto\ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. On vérifie par récurrence que, pour tout $x\in]-1,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\boxed{f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$.*

2. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $\left|f^{(n)}(x)\right|=\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.*

   Méthode 1. *La fonction $x\mapsto\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ est clairement continue décroissante sur le segment $[0,1]$ donc elle est maximale en 0, et son maximum vaut*

   $$\boxed{\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(n)}(x)\right|=|f^{(n)}(0)|=(n-1)!}.$$

   Méthode 2. *$f\in\mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ donc en particulier $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée et atteint ses bornes (d'après le TBA). Le maximum est donc bien défini.*
   D'une part, pour $x\geq 0$, on a $(1+x)^n\geq 1$, d'où $|f^{(n)}(x)|\leq(n-1)!$. Le réel $(n-1)!$ (indépendant de x) est donc un majorant de $|f^{(n)}|$ sur $[0,1]$. Donc $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(n)}(x)\right|\leq(n-1)!$.
   D'autre part, $|f^{(n)}(0)|=(n-1)!$, donc ce majorant est atteint, c'est donc le maximum de $|f^{(n)}|$ sur $[0,1]$.

3. *Soient $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $f\in\mathscr{C}^{n+1}([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall x\in[0,1],\ |f^{(n+1)}(x)|\leq n!$ donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f entre 0 et x, on a :*

   $$\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right|\leq\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}n!\leq\frac{1}{n+1}.$$

   Puisque $\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on a par théorème d'encadrement la conclusion attendue.

Exercice 15. Inégalité de Taylor-Lagrange. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.*
On suppose qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^{ax} f(t)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}$ et en déduire $f^{(n)}(0)$.*
3. *Montrer que f est nulle sur $[0,1]$.*

Correction.

1. **Rédigeons une récurrence.** *Par hypothèse, $f \in \mathscr{C}^0([0,1),\mathbb{R})$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathscr{C}^n([0,1),\mathbb{R})$.
En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soient F celle qui s'annule en 0 et $\phi : [0,1] \to [0,1]$ définie par $\phi(x) = ax$.
On a alors : $\underline{f = F \circ \phi}$, avec ϕ qui est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, en tant que primitive, F est dérivable et $F' = f \in \mathscr{C}^n$. Ainsi, $F \in \mathscr{C}^{n+1}$.
Ainsi, la composée $f = F \circ \phi$, est encore de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
Par récurrence, on a bien $f \in \mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})}$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
$f = F \circ \phi$ donc $f' = F' \circ \phi \times a = af \circ \phi$.
Puis, $f'' = a^2 f' \circ \phi$. En itérant, $f^{(n)} = a^n f^{(n-1)} \circ \phi$ (formule de récurrence).
Donc la formule explicite est :
$f^{(n)} = a^n f^{(n-1)} \circ \phi = a^n a^{n-1} f^{(n-2)} \circ \phi \circ \phi = ... = a^n \dots a \times f \circ \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}$ *puis*

$\boxed{f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x), \text{ pour tout } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbb{N}}$.
Comme $f(0) = 0$, on a : $\boxed{f^{(n)}(0) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

3. *On a des informations locales sur les dérivées successives de f en 0 et on veut des informations globales sur f.*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.
On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$ donc les fonctions polynomiales de Taylor associées à f sont toutes nulles.
De plus, $\forall t \in [0,x]$, $|f^{(n+1)}(t)| = |a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n t)|$. Or, $0 \leq a \leq 1$ et $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ donc d'après le TBA, f est bornée, d'où il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq M$ (remarquons que M est même indépendant de n). Ainsi, $\forall t \in [0,1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$, et f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, entre 0 et x, on a :
$$|f(x)| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} M \leq \frac{M}{(n+1)!},$$
car $x \in [0,1]$. Cette inégalité étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient, par théorème d'encadrement, que $f(x) = 0$, cela pour tout $x \in [0,1]$, d'où $\boxed{f \text{ est nulle sur } [0,1]}$.

Exercice 16. Régularité. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$). On pose*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. *Justifier que φ est bien définie.*
2. *On suppose f continue. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *On suppose f dérivable. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer φ'.*

Correction.

1. *On considère l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, donc c'est licite.*
2. *Comme f continue, le théorème fondamental de l'analyse affirme que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$. En particulier, $F'(0) = f(0)$ et la fonction φ a donc le visage suivant :*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   - *Par opération, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et*

$$\varphi' : x \longmapsto \frac{F'(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{f(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}f(x).$$

     Autre justification. *Si l'on n'a pas nommé de primitive pour f, on utilise le théorème fondamental de l'analyse (encore lui) pour justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^*$ et :*

$$\varphi' : x \longmapsto \frac{-1}{x^2}\int_0^x f + \frac{1}{x}f(x).$$

   - ***Continuité en 0.***
     La fonction F étant dérivable en 0, on a

$$\frac{F(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0),$$

     ce qui se traduit pour φ par $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \varphi(0)$.
     Ainsi, φ est continue en 0.

   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et continue sur } \mathbb{R}}$.

3. ***Étude en 0.*** *Reprenons les notations précédentes. On a*

$$\forall\, x \neq 0, \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\dfrac{F(x)}{x} - F'(0)}{x} = \frac{F(x) - F'(0)x}{x^2}.$$

Comme f est dérivable, la fonction F est deux fois dérivable, et la formule de Taylor-Young peut s'appliquer :

$$F(x) \;=\; F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit :

$$\frac{F(x) - F'(0)x}{x^2} = \frac{1}{2!}F''(0) + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

Donc

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2!}F''(0).$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = \frac{1}{2}f'(0)}$.

Résumons. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\begin{array}{rccl} \varphi' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f + \dfrac{1}{x}f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}}$.

Exercice 17. Un grand classique. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f'(0)}{2}.$$

En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \sin\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \Big(1 + \frac{k}{n^2}\Big).$$

Correction. *Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)$.*

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 1 en 0 (licite car $f \in \mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$). On a

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) - f'(0)x| \leqslant M\frac{|x|^2}{2!},$$

où M est un majorant de $|f''|$ sur $[0,x]$. Prenons $M = \max\limits_{[0,1]} |f''|$, qui ne dépend pas de x.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad \Big|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - f'(0)\frac{k}{n^2}\Big| \leqslant \frac{M}{2!}\Big(\frac{k}{n^2}\Big)^2.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\left|S_n-\sum_{k=0}^{n} f'(0)\frac{k}{n^2}\right| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right| && \textit{par inégalité triangulaire géné dans } \mathbb{C}\\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{M}{2!}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 && \textit{par somme de ce qui précède}\\ &\leq \frac{M}{2!n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \textit{car } M \textit{ est indépendant de } k.\end{aligned}$$

Le membre de droite est un $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ *donc tend vers* 0.
D'après le théorème des gendarmes,

$$S_n-f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\sim\frac{1}{2}$, *d'où*

$$f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{f'(0)}{2}.$$

Comme

$$S_n = \left(S_n-f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\right) + f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2},$$

on en déduit par somme de limites que

$$\boxed{S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{f'(0)}{2}}.$$

Application.

- *La somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ *est du type* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ *avec* $f : x\mapsto\sin(x)$ *qui est de classe* $\mathscr{C}^2$ *et vérifie* $f(0)=0$.
On a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\cos'(0)}{2}=\frac{1}{2}}.$$

- *On transforme ce produit* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ *avec le principe bien connu suivant*

$$\exp(\ln \textit{produit}) = \exp(\textit{somme}\ln)$$

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $f(0) = 0$.
On a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\frac{1}{1+0}}{2} = \frac{1}{2}}.$$

Par continuité de l'exponentielle en $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}}.$$

Exercice 18. Dans l'esprit de Kolmogorov. *Soit f une fonction positive ou nulle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f'' est bornée et l'on note $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.*
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2M_2 f(x)}.$$

Correction. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f :*

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leq \frac{h^2 M_2}{2},$$

d'où, par inégalité triangulaire et comme f est positive,

$$\forall h \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x+h) \leq f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 M_2}{2}.$$

Le trinôme en h :

$$M_2 h^2 + 2f'(x)h + 2f(x)$$

est toujours positif, donc son discriminant est négatif :

$$4f'(x)^2 - 8M_2 f(x) \leq 0,$$

d'où puisque f et M_2 sont positifs :

$$\boxed{|f'(x)| \leq \sqrt{2M_2 f(x)}}.$$

Exercice 19. Inégalités de Kolmogorov. *Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{M_2\,h^2}{2} \qquad \text{et} \qquad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{M_2\,h^2}{2}.$$

2. *A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

3. *En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Correction.

1. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. On rappelle l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f de classe $\mathscr{C}^2$:*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]| \leq K_{a,b}\frac{|b-a|^2}{2!},$$

où $K_{a,b}$ est un majorant de $|f''|$ sur $\overset{\frown}{[a,b]}$.
On peut prendre $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$ (qui ne dépend ni de a ni de b).
En appliquant ce qui précède à $a = x$ et $b = x \pm h$, il vient

$$|f(x\pm h) - [f(x) + (\pm)hf'(x)]| \leq \frac{M_2(\pm h)^2}{2},$$

donc

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2h^2}{2}, \qquad \text{et} \qquad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{M_2h^2}{2}.$$

2. *Il faut « retourner » $f'(x)$ avec les expressions de la question 1.*
On voit que

$$[(f(x-h) - f(x) + hf'(x)) - (f(x-h) - \cancel{f(x)})] - [(f(x+h) - f(x) - hf'(x)) - (f(x+h) - \cancel{f(x)})]$$

vaut $2hf'(x)$. D'où, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 2h|f'(x)| &= |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| + |f(x-h)| + |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| + |f(x+h)| \\ &\leq M_2\frac{h^2}{2} + M_0 + M_2\frac{h^2}{2} + M_0 \\ &\leq M_2h^2 + 2M_0. \end{aligned}$$

En divisant par $2h$ (qui est > 0),

$$\boxed{|f'(x)| \leq M_2 \frac{h}{2} + \frac{M_0}{h}}.$$

3. • *D'après la question 2., on a : $\forall h > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \underbrace{\frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}}_{\text{indépendant de } x}$. Ainsi, $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$ est un majorant de $\{|f'(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$. On en déduit que $\boxed{f' \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$ et que*

$$\underline{\forall h \in \mathbb{R}_+^*,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}.}$$

• *Étudions $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ h & \mapsto & \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h} \end{array}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2}$.*

- *Si $M_2 = 0$, alors $f'' = 0$, donc f est affine. Comme de plus f est supposée bornée, on en déduit que f est constante. Dans ce cas, $f' = 0$, donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0 \leq 0 = \sqrt{2M_0M_2}$.*
- *Sinon $M_2 \neq 0$, et $g'(h) \geq 0 \iff h^2 \geq \frac{2M_0}{M_2} \iff h \geq \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. Notons $h_0 := \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$.*
  * *Si $M_0 = 0$, alors $f = 0$, donc $f' = 0$, donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0 \leq 0 = \sqrt{2M_0M_2}$.*
  * *Sinon, $h_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donc g est décroissante sur $]0, h_0]$ puis croissante sur $[h_0, +\infty[$ donc g est minimale en h_0. Or, après calculs, $g(h_0) = \sqrt{2M_0M_2}$. Ainsi, là encore, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq g(h_0) = \sqrt{2M_0M_2}$.*

Finalement, dans tous les cas, $\boxed{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}}$.

Exercice 20. 1 sur $\sqrt{1-x}$. *On considère la fonction* $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ *définie sur* $[0,1[$.

1. *Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et calculer ses dérivées successives.*
2. *(2a) Prouver l'inégalité :*
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \binom{2n+2}{n+1} \leqslant 4^{n+1}.$$
(2b) Pour tout couple (t,x) de réels tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, vérifier les inégalités
$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.$$
3. *Soit $x \in [0,1[$. Montrer que la suite* $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*

Correction.

1. *La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$ par opérations.*
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ où
$$\mathcal{H}_n : « \varphi^{(n)} : x \mapsto \frac{(2n)!}{4^n n!}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} ».$$
$\triangleright$ *$\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{(2\times 0)!}{4^0 0!}(1-x)^{-\frac{2\times 0+1}{2}} = (1-x)^{\frac{-1}{2}}$ est exactement φ donc $\varphi^{(0)}$.*
$\triangleright$ *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.*
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$. Pour cela, on utilise que $\varphi^{(n+1)} = (\varphi^{(n)})'$.
Ainsi
$$\varphi^{(n+1)} : x \mapsto \frac{(2n)!}{4^n n!} \times \frac{-(2n+1)}{2} \times (-1) \times (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}-1} = \underbrace{\frac{(2n)!}{4^n n!} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(2n+2)}}_{=\frac{\left(2(n+1)\right)!}{4^{n+1}(n+1)!}} \times (1-x)^{-\frac{2(n+1)+1}{2}},$$
ce qui est exactement $\mathcal{H}_{n+1}$.
2. *(2a) On peut procéder par récurrence.*
Ou bien fixer $n \in \mathbb{N}$ et remarquer que $4^{n+1} = (1+1)^{2n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{k}$ et enfin constater que cette somme d'entiers positifs est supérieure à l'un d'entre eux, à savoir $\dbinom{2n+2}{n+1}$.
(2b) Fixons $(x,t) \in [0,1[^2$. Procédons par équivalences successives. On a

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \iff 0 \leqslant x-t \leqslant (1-t)x \iff \begin{cases} 0 \leqslant x-t \\ x-t \leqslant (1-t)x \end{cases} \iff \begin{cases} t \leqslant x \\ 0 \leqslant (1-x)t \end{cases} \underset{t\geqslant 0}{\overset{1-x>0}{\iff}} t \leqslant x$$

3. *Soit $x \in [0,1[$.*

On peut penser à utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et on a $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{(2k)!}{4^k k!}(1-0)^{\frac{-(2k+1)}{2}} = \dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\left|\varphi(x) \ - \ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^k\right| \ \leq \ K_{n,x}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

où $K_{n,x}$ est un majorant de $|\varphi^{(n+1)}|$ sur $[0,x]$.

On a

$$\forall\, t \in [0,x], \qquad |\varphi^{(n+1)}(t)| \ = \ \varphi^{(n+1)}(t) \ = \ \underbrace{\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}}_{=(n+1)!\times\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}} \times \frac{1}{(1-t)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

D'après la question précédente, on a $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \leq 1$.

Par croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{n+\frac{3}{2}}}$, *on a donc*

$$\forall\, t \in [0,x], \qquad |\varphi^{(n+1)}(t)| \ \leq \ (n+1)! \times \frac{1}{(1-x)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

On peut prendre $K_{n,x} = (n+1)!\dfrac{1}{(1-x)^{n+\frac{3}{2}}}$.

D'où

$$\left|\varphi(x) \ - \ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^k\right| \ \leq \ \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Hélas, aucune raison pour que $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n$ *tende vers 0.* $\boxed{\textit{échec}}$

Du coup, on prend la formule de Taylor avec reste intégral.

On a

$$\varphi(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Occupons-nous du reste intégral.

$$\forall\, t \in [0,x], \qquad \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t) \ = \ \underbrace{\frac{1}{n!} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}}_{=(n+1)\times\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}} \times \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \times \frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $t \mapsto (1-t)^{\frac{-3}{2}}$ est croissante, et en utilisant les deux questions précédentes, on a

$$\forall t \in [0,x], \qquad 0 \ \leq \ \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t) \quad \leqslant \quad (n+1) \times 1 \times x^n \times \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par croissance de l'intégrale entre 0 et x (bornes dans le bon sens), on en déduit que le reste intégral vérifie

$$0 \ \leq \ \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}_{=\mathrm{RI}_n(x)} \quad \leqslant \quad (n+1) \times x^{n+1} \times \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le membre droit tend vers 0 (par croissance comparée et le fait que $x \in [0,1[$), donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{RI}_n(x) = 0$. D'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ \varphi(x)}.$$

N.B. *Cela signifie exactement que la série $\sum \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$ converge et que sa somme vérifie*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-x}}}.$$

Égalités et inégalités

Exercice 21. Théorème de la moyenne. *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (avec $a<b$). Montrer qu'on peut trouver $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.*

Correction.

Méthode 1. *f étant continue, considérons F une de ses primitives. Alors*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

est l'accroissement de la fonction F entre a et b. Or, F est dérivable sur $[a,b]$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$. Or, $F' = f$ donc on a l'égalité souhaitée.

Méthode 2. *$f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ donc d'après le TBA, f est bornée et atteint ses bornes. On note $m = \min f_{[a,b]}$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Alors pour tout $t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq M$, puis par croissance de l'intégrale sur $[a,b]$ avec $a<b$, on a*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M.$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ est donc compris entre deux images de f. Comme f est continue sur l'intervalle $[a,b]$,

le TVI assure l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$.
Problème. *A priori, on n'a pas $c \in]a,b[$. On se rabat donc sur la première méthode !*

Exercice 22. Encadrement pour les monotones. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et croissante. Montrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n}f(0) \;+\; \int_0^1 f \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \;\leq\; \int_0^1 f \;+\; \frac{1}{n}f(1).$$

Que peut-on en conclure ?

Correction. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Alors $\dfrac{k}{n} \in [0,1]$.*
Par croissance de f, on a

$$\forall t \in \Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big],\; f(t) \leq f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

Par continuité par morceaux de f, et croissance de l'intégrale pour les fonctions cpm sur un segment, on a

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f \;\leq\; \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

En sommant pour $k \in [\![1,n]\!]$ et par relation de Chasles, il vient

$$\int_0^1 f \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

En ajoutant $\dfrac{f(0)}{n}$, il vient

$$\boxed{\frac{f(0)}{n} \;+\; \int_0^1 f \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)}.$$

De même, $\forall t \in \Big[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\Big]$, $f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) \leq f(t)$, donc $\dfrac{1}{n}f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f$, puis en sommant pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, il vient $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \leq \int_0^1 f$, et en ajoutant $\dfrac{f(1)}{n}$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \;\leq\; \int_0^1 f + \frac{f(1)}{n}}.$$

Finalement, on a bien l'encadrement souhaité.
Remarquons que $\dfrac{f(0)}{n} \to 0$ et $\dfrac{f(1)}{n} \to 0$, donc les deux suites qui encadrent la suite centrale tendent vers le réel $\displaystyle\int_0^1 f$.
Par théorème d'encadrement, on en déduit que la suite centrale tend également vers $\displaystyle\int_0^1$ et on a montré le théorème suivant :

Lorsque f est continue par morceaux et croissante sur $[0,1]$, à valeurs réelles, alors on a la convergence de la somme de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

Exercice 23. Un faux théorème de convergence de Riemann.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.
Il s'agit de montrer que (S_n) admet une limite et la déterminer.
Un élève remarque que $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
Malheureusement, cette fonction est seulement définie sur l'ouvert $[0,1[$ (qui n'est donc pas un segment), et on ne peut donc pas appliquer le théorème des sommes de Riemann. Comment s'en sortir ? Quelle qualité (certes, moins remarquable que la continuité) f possède-t-elle ?

On pourra s'inspirer de l'exercice 22.

Correction. *Posons $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est **croissante** et continue par morceaux sur $[0,1[$ (attention, f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$, car elle n'est pas définie en 1 et ni prolongeable par continuité en 1).*
En reprenant les mêmes idées de la preuve de l'exercice 22, on a

$$\frac{1}{n}f(0) \;+\; \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \;\leq\; \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \;+\; \frac{1}{n}f\Big(1-\frac{1}{n}\Big). \qquad (\star)$$

Quelques détails.
Pour $n \geq 2$, et $k \in [\![0, n-2]\!]$, on a $\forall t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, $f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.
Par croissance de l'intégrale, on a $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} f \leq \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.
En sommant, il vient : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{n-1}{n}} f \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} f\left(\frac{\ell}{n}\right)$.
En ajoutant les termes manquants, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \;\leq\; \int_0^{\frac{n-1}{n}} f \;+\; \frac{1}{n}f\Big(\frac{n-1}{n}\Big) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}f(0) \;+\; \int_0^{\frac{n-1}{n}} f \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

Des petits calculs montrent que $f(0) = 1$,

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f \;=\; \Big[\arcsin t\Big]_0^{1-\frac{1}{n}} = \arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \qquad \textit{par continuité de } \arcsin \textit{ en 1,}$$

et
$$\frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n^2}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Les deux suites à gauche et à droite dans $(\star)$ *tendent toutes les deux vers* $\frac{\pi}{2}$*, donc d'après le théorème des gendarmes, on obtient*
$$\boxed{S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 24. Une fonction constante. *Considérons* $f:[0,1]\to[0,1]$ *une fonction continue, non nulle et telle que* $\int_0^1 f=\int_0^1 f^2$*. Montrer que* f *est constante égale à* 1*.*

Correction. *Posons* $g=f-f^2$*. Autrement dit,* $g:t\mapsto f(t)(1-f(t))$*. On a*

- $\star$ g *est continue par opérations (car* f *est continue)*
- $\star$ g *est positive, car* f *est à valeurs dans* $[0,1]$
- $\star$ $\int_0^1 g=0$ *par hypothèse*

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g *est la fonction nulle, donc* $\boxed{f=f^2}$.

Attention ici*, à ne pas dire soit* $f=0$*, soit* $f=1$ *!!!!*
D'où $\forall\, t\in[0,1],\ \Big(f(t)=0 \text{ ou } f(t)=1\Big)$.
Ainsi l'image de f *est incluse dans* $\{0,1\}$*.*
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0,1]$ *par la fonction continue* f *est un intervalle, qui est donc soit le singleton* $\{0\}$*, soit le singleton* $\{1\}$*.*
Autrement dit, on a
$$\Big(\forall\, t\in[0,1],\ f(t)=0\Big)\quad \text{ou}\quad \Big(\forall\, t\in[0,1],\ f(t)=1\Big).$$
Comme f *n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que* f *est constante égale à* 1*.*
Variante. $f\neq 0$*, donc il existe* $t_1\in[0,1]$ *tel que* $f(t_1)\neq 0$*, donc* $f(t_1)=1$*.*
Si $f\neq 1$*, alors il existe* $t_0\in[0,1]$ *tel que* $f(t_0)\neq 1$*, donc* $f(t_0)=0$*. La fonction continue* f *prendrait alors les valeurs* 0 *et* 1*, donc toute valeur intermédiaire (par exemple* $\frac{1}{12}$*) d'après le TVI, ce qui n'est pas. Donc* $\boxed{f=1}$.

Exercice 25. *Soient* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $a<b$ *et* $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*. On suppose que* $\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b|f|$*. Montrer que* f *est de signe constant sur* $[a,b]$*.*

Correction. *L'hypothèse implique* $\int_a^b f=\pm\int_a^b|f|$*. Procédons par disjonction sur le signe du réel* $\int_a^b f$*.*

Premier cas. *Si* $\int_a^b f\geq 0$*, alors* $\int_a^b f=\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b|f|$*, d'où par linéarité de l'intégrale :* $\int_a^b(|f|-f)=$

0.
Or, $f \leq |f|$, donc $|f| - f \geq 0$ et f est continue sur $[a,b]$ et $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition $|f|$ est continue et par différence $|f| - f$ est continue sur $[a,b]$.
Par théorème, on en déduit que $|f| - f = 0$ sur $[a,b]$, donc $f = |f| \geq 0$.

Deuxième cas. *Si $\displaystyle\int_a^b f \leq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f = -\left|\int_a^b f\right| = -\int_a^b |f|$, d'où par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b (|f| + f) = 0$.*
De plus, $-f \leq |f|$, donc $|f| + f \geq 0$ et par composition et somme, $|f| + f$ est continue sur $[a,b]$.
Par théorème, on en déduit que $|f| + f = 0$ sur $[a,b]$, donc $f = -|f| \leq 0$.

$\boxed{\text{Dans tous cas, } f \text{ est de signe constant sur } [a,b]}$.

Alternative. *En élevant l'égalité au carré, on obtient $\left(\displaystyle\int_a^b f\right)^2 = \left(\displaystyle\int_a^b |f|\right)^2$ donc $\left(\displaystyle\int_a^b |f|\right)^2 - \left(\displaystyle\int_a^b f\right)^2 = 0$, puis en factorisant : $\left(\displaystyle\int_a^b |f| - \int_a^b f\right)\left(\displaystyle\int_a^b |f| + \int_a^b f\right) = 0$ puis par linéarité de l'intégrale et intégrité de $\mathbb{R}$, on obtient*

$$\int_a^b (|f| - f) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b (|f| + f) = 0.$$

Même conclusion.

Exercice 26. *Soient $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$ et $\forall x \in [a,b],\ 0 \leq f'(x) \leq 1$.*
Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f^3 \leq \left(\int_a^b f\right)^2$.

Correction.

- *On doit montrer que : $\left(\displaystyle\int_a^b f\right)^2 - \displaystyle\int_a^b f^3 \geq 0$.*
- *On va montrer plus fort (on généralise le problème) : $\forall x \in [a,b],\quad \left(\displaystyle\int_a^x f\right)^2 - \displaystyle\int_a^x f^3 \geq 0$.*
- *On introduit la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \left(\displaystyle\int_a^x f\right)^2 - \displaystyle\int_a^x f^3$. On doit montrer que F est positive.*
- *Notons respectivement F_1 et F_3 les primitives de f et f^3 qui s'annulent en a.*
- *On a : $F = F_1^2 - F_3$ donc F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = 2F_1 f - f^3 = f(2F_1 - f^2)$.*
- *Par hypothèse, $f' \geq 0$ sur l'intervalle $[a,b]$ donc f est croissante sur $[a,b]$. De plus, comme $f(a) = 0$, $\underline{f \text{ est positive sur } [a,b]}$.*
- *Étudions le signe de $g := 2F_1 - f^2$. La fonction g est dérivable sur $[a,b]$ et $g' = 2f - 2ff' = 2f(1 - f')$.*

- *On a : $f' \leq 1$ et $f \geq 0$ donc $g' \geq 0$ sur l'intervalle $[a,b]$. Ainsi, g est croissante sur $[a,b]$, or $g(a) = 0$, d'où g est positive sur $[a,b]$.*
- *Finalement : $\forall x \in [a,b],\ F'(x) \geq 0$ donc F est croissante sur $[a,b]$. Or, $F(a) = 0$ donc $\forall x \in [a,b], F(x) \geq 0$.* $\boxed{\text{En particulier, } F(b) \geq 0}$.

Divers

Exercice 27. Fonction 1-périodique. *Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et périodiques de période 1 et*

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (E).$$

Déterminer les solutions 1-périodiques de (E).

1. *Résolution de (E) : (H) : $y' - a(x)y = b(x)$ donc $S(H) = \mathrm{Vect}\left(e^A\right)$ où $A : x \mapsto \int_0^x a$ est la primitive de a qui s'annule en 0.*
   La variation de la constante implique que $x \mapsto \left(\int_0^x be^{-A}\right)e^A$ est une solution particulière de (E).
   $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont donc les } \{y_\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{ où } y_\lambda : x \mapsto e^{A(x)}\left(\lambda + \int_0^x be^{-A}\right)}$.
2. *Détermination des solutions 1-périodiques de (E) : soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

$$y_\lambda(x+1) - y_\lambda(x) = e^{A(x+1)}\left(\lambda + \int_0^{x+1} be^{-A}\right) - e^{A(x)}\left(\lambda + \int_0^x be^{-A}\right).$$

- *D'après la relation de Chasles :*

$$A(x+1) = \int_0^{x+1} a = \int_0^x a + \int_x^{x+1} a = \int_0^x a + \int_0^1 a,$$

car a est 1-périodique donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+1} a = \int_0^1 a =: \alpha$. Ainsi, $\boxed{A(x+1) = A(x) + \alpha}$.

- *D'après la relation de Chasles :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{x+1} be^{-A} &= \underbrace{\int_0^1 be^{-A}}_{=:\beta} + \int_1^{x+1} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t \\
&= \beta + \int_0^x b(u+1)e^{-A(u+1)}\mathrm{d}u \qquad \textit{(chgt de variable u=t-1)} \\
&= \beta + \int_0^x b(u)e^{-A(u)-\alpha}\mathrm{d}u \\
\boxed{\int_0^{x+1} be^{-A}} &= \boxed{\beta + e^{-\alpha}\int_0^x be^{-A}}.
\end{aligned}$$

- *Ainsi :*

$$\begin{aligned}
y_\lambda(x+1) - y_\lambda(x) &= e^{A(x)} e^{\alpha} \left(\lambda + \beta + e^{-\alpha} \int_0^x b e^{-A}\right) - e^{A(x)} \left(\lambda + \int_0^x b e^{-A}\right) \\
&= e^{A(x)} \left(\lambda e^{\alpha} + \beta e^{\alpha} + \int_0^x b e^{-A}\right) - e^{A(x)} \left(\lambda + \int_0^x b e^{-A}\right) \\
&= e^{A(x)} \left(\lambda(e^{\alpha} - 1) + \beta e^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto e^{A(x)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

$$y_\lambda \text{ est 1-périodique} \iff \lambda(e^{\alpha} - 1) + \beta e^{\alpha} = 0.$$

Remarque : α, β sont des données de l'énoncé donc il faut trouver les $\lambda \in \mathbb{R}$ qui vérifient cette équation.

  - $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0, \text{ alors l'unique solution 1-périodique de } (E) \text{ est } y_{\lambda_0} \text{ où } \lambda_0 = \dfrac{\beta e^{\alpha}}{1 - e^{\alpha}}}$.
  - *Si $\alpha = 0$, alors y_λ est 1-périodique $\iff \beta e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ donc :*
    - $\boxed{\text{Si } \beta = 0, \text{ toutes les solutions de } (E) \text{ sont 1-périodiques}}$.
    - $\boxed{\text{Si } \beta \neq 0, \text{ il n'y a aucune solution de } (E) \text{ 1-périodique}}$.

En conclusion, l'ensemble des solutions 1-périodique de (E), noté S vaut $\boxed{S = \begin{cases} \left\{ y_{\frac{\beta e^{\alpha}}{e^{\alpha} - 1}} \right\} & \text{si } \alpha \neq 0; \\ S_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}(E) & \text{si } (\alpha, \beta) = (0, 0) \\ \varnothing & \text{si } \alpha = 0 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^*. \end{cases}}$