Dans tous les exercices, on considère (Ω, P) un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés des probabilités

Exercice 1. Évènements. *Soient A, B et C trois évènements de Ω. Exprimer de manière ensembliste en fonction de A, B et C les évènements suivants et citer leur contraire.*

E_1 : « Au moins un des trois évènements se réalise ».
E_2 : « Un seul des trois évènements se réalise ».
E_3 : « Au moins deux des trois évènements se réalisent ».
E_4 : « Au plus deux des trois évènements se réalisent ».
E_5 : « Aucun des trois évènements ne se réalise ».

Correction.

- $E_1 = A \cup B \cup C$.
  $\overline{E_1} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = E_5$: *« aucun des trois évènements ne se réalise ».*
- $E_2 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
  $\overline{E_2}$: *« aucun évènement ne se réalise ou bien au moins deux évènements se réalisent » donc* $\overline{E_2} = E_5 \cup E_3$.
- $E_3 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.
  $\overline{E_3}$: *« au plus un évènement se réalise » donc* $\overline{E_3} = E_5 \cup E_2$.
  Remarquons que (E_2, E_3, E_5) forme une partition de Ω.
- E_4 : *« il y a au moins un évènement qui ne se réalise pas », donc* $E_4 = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
  $\overline{E_4} = A \cap B \cap C$: *« tous les évènements se réalisent ».*
- $E_5 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{E_1}$.
  $\overline{E_5} = E_1$: *« au moins un évènement se réalise ».*

Exercice 2. Détermination d'une mesure de probabilité. *On lance un dé à six faces, truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.*

Correction. *On pose $J = [\![1, 6]\!]$. Pour tout $k \in J$, on note $p_k = \mathrm{P}(\{k\})$. D'après l'hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall k \in J,\ p_k = Ck.$$

On a

$$\sum_{k \in J} p_k = C \sum_{k=1}^{6} k = C \frac{6 \times 7}{2} = 21C.$$

Or, $\sum_{k \in J} p_k = 1$. *D'où* $\boxed{C = \frac{1}{21}}$.
L'événement A « on obtient un numéro pair » est la partie $A = \{2; 4; 6\}$. D'où

$$\mathrm{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 2C + 4C + 6C = 12C = \frac{12}{21} = \boxed{\frac{4}{7}}.$$

Exercice 3. Une inégalité. *Montrer que, pour toute famille finie $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'évènements de l'espace probabilisé (Ω, P), on a :*

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j).$$

Correction. *On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$*

$$H_n : \text{« } \forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathscr{P}(\Omega)^n,\ \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) \text{ »}.$$

Si l'on voulait être plus rigoureux encore, on pourrait opter pour une récurrence finie sur $m \in [\![1, n]\!]$, car officiellement n est fixé. On noterait alors pour tout $m \in [\![1, m]\!]$,

$$Q_m : \text{« } \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \geq \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) \text{ »}.$$

Initialisation. *Pour $n = 1$, le membre droit est réduit à $\mathrm{P}(A_1)$. Comme le membre gauche vaut $\mathrm{P}(A_1)$, on a égalité. A fortiori, on a une inégalité, d'où H_1.*

Remarque. *H_2 est également vraie d'après la formule du crible de Poincaré.*

Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n. Montrons H_{n+1}. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in \mathscr{P}(\Omega)^{n+1}$. On a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \mathrm{P}((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})).
\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence H_n au premier terme et la sous-additivité au troisième, on obtient :

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap A_{n+1}).$$

Le terme $\mathrm{P}(A_{n+1})$ peut se marier avec la première somme.
Quant à la dernière somme indexée par $i \in [\![1, n]\!]$, elle peut se marier avec la deuxième somme indexée sur $1 \leq i < j \leq n$ et fournir une somme indexée par $1 \leq i < j \leq n+1$.
D'où

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) \geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathrm{P}(A_i \cap A_j),$$

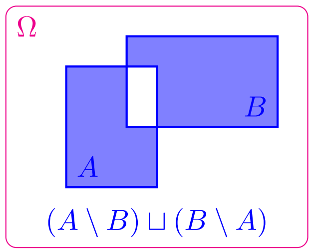
c'est-à-dire H_{n+1}.

Exercice 4. Probabilité d'une différence symétrique. *Soient deux évènements* $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *de l'espace probabilisé fini* (Ω, P)*, tels que*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{7}{10}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{9}{10}.$$

Calculer $\mathrm{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

Correction.



Donnons deux méthodes.
Dans les deux méthodes, on aura besoin de calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$*. Faisons-le donc dès maintenant.*
On a d'après la formule de Poincaré

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{2} - \frac{9}{10} \\ &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Première méthode. *On remarque que les deux événements* $A \setminus B$ *et* $B \setminus A$ *sont incompatibles/disjoints (puisque* $A \setminus B \subset A$ *et* $B \setminus A \subset \overline{A}$*, par exemple). On peut donc utiliser l'additivité de* P.

- *Comme* $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$*, par additivité*

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \setminus B) + \mathrm{P}(A \cap B) \quad \textit{donc} \quad \mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

- *De même,*

$$\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}.$$

Ainsi, par additivité,

$$\boxed{\mathrm{P}((A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}}.$$

Deuxième méthode. *On peut montrer que* $(A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ *(cette opération s'appelle la* ***différence symétrique*** *de* A *et* B*, notée* $A \triangle B$*).*

Comme $A \cap B \subset A \cup B$*, on peut donc décomposer* $A \cup B$ *en union disjointe :*

$$A \cup B = (A \triangle B) \sqcup (A \cap B),$$

donc on a par additivité

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\triangle B) &= \mathrm{P}(A\cup B) - \mathrm{P}(A\cap B)\\ &= \frac{9}{10} - \frac{3}{10}\\ &= \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Exercice 5. Poincaré et formule du crible. *Soient A, B et C des évènements de Ω.*

1. *On suppose que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$. Montrer que $\frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(A\cap B) \leq \frac{3}{4}$.*
2. *Montrer que $\mathrm{P}(A\cup B\cup C) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$.*
3. *Montrer que pour toute famille d'évènements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de Ω,*

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}\mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}).$$

On pourra procéder par récurrence sur n.

4. *A l'entrée d'une salle de devoir, n étudiants déposent leur téléphone portable. Le devoir est interrompu par une alerte incendie et chaque étudiant récupère au hasard un téléphone à la sortie de la salle. Quelle est la probabilité qu'aucun étudiant ne soit alors en possession de son téléphone ?*
Indication : *on pourra utiliser la question 3., après avoir soigneusement défini les évènements considérés.*

Correction.

1. *Par définition d'une intersection : $A\cap B\subset A$ donc par croissance de la probabilité P :*

$$\mathrm{P}(A\cap B) \leq \mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}.$$

Par ailleurs, $\mathrm{P}(A\cup B)\leq 1$ et d'après la formule de Poincaré,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B) &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\ &\geq \frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. *Utiliser 3 fois la formule de Poincaré.*
3. *Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, la proposition*

$$H_n : « \forall (A_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathscr{P}(\Omega)^n,\ \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}\mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}). »$$

Initialisation immédiate pour $n=1$. Remarquons que H_2 est la formule de Poincaré (déjà prouvée).

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n+1} \in \mathscr{P}(\Omega)^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) && \textit{d'après la formule de Poincaré} \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) && \textit{par distributivité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}) + \mathrm{P}(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}\cap A_{n+1}) && \textit{en appliquant deux fois l'HR} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_i) + (-1)^n \mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}\cap A_{n+1}) && \textit{en découpant les deux sommes} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_i) + (-1)^n \mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{k-1}\leq n} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_{k-1}}\cap A_{n+1}) && \textit{chgt d'indice} \\
&\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_i) + (-1)^n \mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n+1} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}) && \textit{en regroupant les deux sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n+1} \mathrm{P}(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}) && \textit{en regroupant les termes.}
\end{aligned}$$

*N.B. : En *, on utilise le fait que choisir k ensembles parmi $A_1, \ldots, A_{n+1}$ revient à faire une partition suivant le fait que l'on choisisse A_{n+1} ou pas.*

4. *Les n étudiants ont $n!$ manières différentes de se répartir les n téléphones. Notons T_i l'évènement « le i^e étudiant a retrouvé son téléphone » et A_n l'évènement « aucun des n étudiants n'a récupéré*

son téléphone ». On a alors $\overline{A_n} = \bigcup_{i=1}^n T_i$, *et d'après 3.,*

$$\mathrm{P}(\overline{A_n}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \mathrm{P}(T_{j_1} \cap \cdots \cap T_{j_k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^k T_{j_i}\right).$$

- *Pour* $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ *fixés,* $\bigcap_{i=1}^k T_{j_i}$ *est l'évènement « les* k *étudiants concernés sont en possession de leur téléphone », les* $n-k$ *autres pouvant être, ou non, en possession de leur téléphone. Cet évènement se produit de* $(n-k)!$ *manières différentes. Ainsi,* $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^k T_{j_i}\right) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.
- *De plus, il y a* $\binom{n}{k}$ *façons de choisir les* k *indices* $j_1, \ldots, j_k$ *dans* $[\![1, n]\!]$.
- *Donc :* $\mathrm{P}(\overline{A_n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$, *puis*

$$\mathrm{P}(A_n) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$ *et* $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(A_n) = e^{-1} = \frac{1}{e}}$.

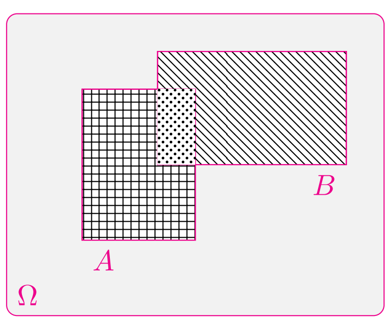
Exercice 6. Une « copartition ». *Soient deux événements* $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *de* Ω. *Montrer*

$$\mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cup \overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A} \cup B) + \mathrm{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = 3.$$

Correction. *Le point sous-tendant cet exercice est que la famille à quatre événements*

$$\mathscr{S} = (A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B})$$

est un système complet d'événements (qui correspond à la double disjonction de cas : est-on dans A *? est-on dans* B *?).*



Les quatre « zones » du système complet d'événements $\mathscr{S}$.

Il suffit ensuite de constater que les quatre événements apparaissant dans la somme de l'énoncé sont, *par la loi de De Morgan, les complèmentaires de ces quatre événements. Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cup \overline{B})+\mathrm{P}(\overline{A}\cup B)+\mathrm{P}(\overline{A}\cup \overline{B}) &= \left(1-\mathrm{P}(\overline{A}\cap \overline{B})\right)+\left(1-\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)\right)+\\
&\qquad \left(1-\mathrm{P}(A\cap \overline{B})\right)+(1-\mathrm{P}(A\cap B))\\
&= 4-\left(\mathrm{P}(\overline{A}\cap \overline{B})+\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)+\mathrm{P}(A\cap \overline{B})+\mathrm{P}(A\cap B)\right)\\
&= 4-1 \qquad\qquad \textit{(car } \mathscr{S} \textit{ S.C.E.)}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

Dénombrement

Exercice 7. L'exo de la Piston 2. *On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ où $n \geq 2$. On choisit au hasard une permutation dans S_n. Déterminer la probabilité que 2 soit un point fixe.*

Correction. *Considérons $\Omega = S_n$ que l'on munit de la probabilité uniforme P.*
On note E l'événement « 2 est un point fixe ». Comme P est uniforme, on a $\mathrm{P}(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|}$.
Se donner une issue de E revient à :

- *choisir l'image de 2 (à savoir 2) : il y a 1 choix ;*
- *choisir l'image des $n-1$ autres éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{2\}$: il y a $(n-1)!$ choix.*

D'où $|E| = (n-1)!$ (on peut aussi dire qu'un élément de E s'identifie à une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{2\}$ qui est de cardinal $n-1$, d'où $|E| = (n-1)!$).
Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}.$$

Exercice 8. Jeu de cartes. *On extrait (simultanément) 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On appelle* ***main*** *un tel tirage.*

1. *Combien y-a-t-il de mains possibles ? Décrire Ω.*
2. *Quelle est la probabilité que la main tirée comporte exactement un as ?*
3. *Quelle est la probabilité que la main tirée comporte au moins un valet ?*
4. *Quelle est la probabilité que la main tirée comporte au moins une dame et au moins un roi (à la fois) ?*

Correction.

1. *Ω est l'ensemble des 5-combinaisons (=5-parties) du jeu de 52 cartes, donc* $\boxed{\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{52}{5}}$
   Il y a équiprobabilité, on utilisera donc la probabilité uniforme P dans la suite.
2. *Notons A cet évènement. Comme P est uniforme, on a $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}\, A}{\mathrm{Card}\, \Omega}$.*
   Se donner une issue de A revient à :

- *choisir un as : il y a 4 possibilités ;*
- *choisir 4 cartes qui ne sont pas des as : il y a* $\binom{52-4}{4}$ *possibilités.*

D'où $\mathrm{Card}(A) = 4\binom{48}{4}$ *donc* $\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{4\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}}}$.

3. *Notons* B *cet évènement. Alors* $\overline{B}$ *est l'évènement « ne pas avoir de valet ». On a :* $\mathrm{Card}(\overline{B}) = \binom{48}{5}$ *donc* $\boxed{\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}}$.

4. *Notons* C *l'évènement « avoir au moins une dame et au moins un roi ».*
Alors $\overline{C}$ *est l'évènement « ne pas avoir de dame ou ne pas avoir de roi »=:* $D \cup R$*, avec* D *(resp.* R*) les évènement « ne pas avoir de dame »(resp. « ne pas avoir de roi »).*
Attention, cette union n'est pas disjointe ! D'après la formule de Poincaré, on a :
$\mathrm{Card}(\overline{C}) = \mathrm{Card}(D) + \mathrm{Card}(R) - \mathrm{Card}(D \cap R) = \binom{48}{5} + \binom{48}{5} - \binom{44}{5}$ *puis* $\underline{\mathrm{Card}(C) = \binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5}}$,
et $\mathrm{P}(C) = \frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Exercice 9. Tarot. *Dans un jeu de tarot, on isole les 21 atouts numérotés de 1 à 21 puis on choisit trois atouts au hasard. Calculer la probabilité d'obtenir parmi ces trois atouts :*

a) le 1 ou le 21 ;

b) au moins un numéro multiple de cinq ;

c) au plus deux numéros multiples de cinq ;

d) exactement un numéro multiple de cinq et un numéro multiple de quatre.

Correction. Ω *est l'ensemble des parties à 3 éléments donc* $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{21}{3} = 1330$*. Il y a équiprobabilité sur* Ω *donc on munit* Ω *de la probabilité uniforme* P.

a) *On note* A *l'évènement « obtenir le 1 ou le 21 » ;* $\overline{A}$ *: « obtenir ni le 1, ni le 21 » ;*
$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \binom{19}{3}$ *(on choisit 3 cartes dans* $[\![2, 20]\!]$*) donc* $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{19}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{3 \times 17}{70} = \frac{51}{70}$.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{\binom{19}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{19}{70} \simeq 0,27}$.

b) *On note* B *l'évènement « obtenir au moins un numéro multiple de cinq i.e. le 5 ou le 10 ou le 15 ou le 20 ».* $\overline{B}$ *est donc l'évènement « obtenir ni le 5 ni le 10 ni le 15 ni le 20 », ce qui revient à choisir 3 atouts parmi 21-4=17. Ainsi,* $\mathrm{P}(\overline{B}) = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{17 \times 4}{19 \times 7} = \frac{68}{133}$ *donc* $\boxed{\mathrm{P}(B) = 1 - \frac{\binom{17}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{65}{133} \simeq 0,49}$.

c) *On note* C *l'évènement « obtenir au plus deux numéros multiples de cinq ».* $\overline{C}$ *: « obtenir 3 multiples de 5 donc piocher 3 cartes parmi les 4 multiples de 5.*
Ainsi, $\mathrm{P}(\overline{C}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{4}{1330}$ *puis* $\boxed{\mathrm{P}(C) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{1326}{1330} = \frac{663}{665} \simeq 0,9967}$.

d) On note D l'évènement « obtenir exactement un numéro multiple de cinq et un numéro multiple de quatre ».

- *Remarquons que les multiples de 5 sont : 5-10-15-20 et les multiples de 4 sont : 4-8-12-16-20.*
- *On note E : « obtenir de 20 ».*
- $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D \cap E) + \mathrm{P}(D \cap \overline{E})$.
- *$D \cap E$: « obtenir le 20 et 2 cartes qui ne sont ni multiple de 5 ni multiple de 4 », revient à choisir 2 cartes parmi 13. Ainsi* $\mathrm{Card}(D \cap E) = \binom{13}{2} = 13 \times 6 = 78$.
- *$D \cap \overline{E}$: « obtenir exactement un multiple de 5 différent de 20 et exactement un multiple de 4 différent de 20 ». Ainsi* $\mathrm{Card}(D \cap \overline{E}) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{13}{1} = 3 \times 4 \times 13 = 156$.
- *Ainsi,* $|D| = 234$ *et* $\boxed{\mathrm{P}(D) = \dfrac{|D|}{|\Omega|} = \dfrac{234}{1330} = \dfrac{117}{665} \simeq 0,17}$.

Exercice 10. Loto. *On rappelle que sont représentés sur une grille de loto tous les entiers compris entre 1 et* 49*.*
Une personne coche 6 numéros au hasard sur une grille de loto (on ne tient pas compte du complémentaire). Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir exactement 4 bons numéros ? *b) d'obtenir au moins 4 bons numéros ?*

Correction. *On note B_4 l'évènement « obtenir exactement 4 bons numéros » et B l'évènement « obtenir au moins 4 bons numéros ».*
Ω est l'ensemble des parties à 6 éléments choisis dans $[\![1,49]\!]$ donc $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{49}{6}$ et comme il y a équiprobabilité, on munit Ω de la probabilité uniforme P.

a) Dénombrer B_4 revient à « choisir 4 bons numéros parmi les 6 bons et 2 parmi les 43 mauvais ».
Ainsi, $\mathrm{Card}(B_4) = \binom{6}{4} \times \binom{43}{2}$*, d'où* $\boxed{\mathrm{P}(B_4) = \dfrac{\mathrm{Card}(B_4)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{6}{4} \times \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}}$.

b) On peut écrire $B = B_4 \sqcup B_5 \sqcup B_6$ où B_k : « obtenir exactement k bons numéros ». Comme les unions sont disjointes, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(B) &= \mathrm{Card}(B_4) + \mathrm{Card}(B_5) + \mathrm{Card}(B_6)\\ &= \binom{6}{4} \times \binom{43}{2} + \binom{6}{5} \times \binom{43}{1} + 1,\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{6}{4} \times \binom{43}{2} + 6 \times 43 + 1}{\binom{49}{6}}}$.

Exercice 11. Domino. *Un domino est un rectangle sur lequel figurent deux chiffres pris avec répétition dans l'ensemble* $[\![0,6]\!]$.

a) *Si on tire au hasard, successivement et sans remise, deux dominos dans un jeu complet, quelle est la probabilité qu'ils possèdent un chiffre en commun ?*

b) *Si on tire maintenant, successivement et sans remise, quatre dominos dans un jeu complet, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un domino double ?*

Correction. *Remarque : le domino (1,6) = (6,1) si on le retourne...*

Comptons le nombre total de dominos, il y en a : $7+6+5+4+3+2+1 = \dfrac{7\times 8}{2} = 28$.

On note A l'évènement « les 2 dominos ont un chiffre en commun » et on écrit $A = A_0 \sqcup A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_6$ *où A_k est l'évènement « les 2 dominos ont le chiffre k en commun », et ces unions sont disjointes, donc* $\mathrm{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(A_k)$. *Or, pour tout* $k \in [\![0,6]\!]$, $\mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}(A_0)$ *donc* $\underline{\mathrm{P}(A) = 7\mathrm{P}(A_0)}$.

On note B l'évènement « il y a au moins un numéro double ». Alors $\overline{B}$ est l'évènement « il n'y a aucun numéro double ».

1. **Première méthode : un tirage successif sans remise et sans ordre peut être assimilé à un tirage simultané.**

   a) *Considérons donc comme univers Ω l'ensemble de toutes les 2-combinaisons de dominos donc* $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{28}{2} = 378 = 3\times 7\times 18$. *Il y a équiprobabilité sur Ω donc on le munit de la probabilité uniforme* P.

   $\mathrm{Card}(A_0) = \binom{7}{2} = 21$, *donc* $\boxed{\mathrm{P}(A) = \dfrac{7\times 21}{3\times 7\times 18} = \dfrac{7}{18}}$.

   b) *Ici, le nouvel univers Ω' est l'ensemble des 4-combinaisons de dominos donc* $\mathrm{Card}(\Omega') = \binom{28}{4}$.
   On munit aussi Ω' de la probabilité P.
   Il y a 7 dominos doubles donc 28-7=21 dominos non doubles.

   Ainsi, $\mathrm{Card}(\overline{B}) = \binom{21}{4}$ *donc* $\boxed{\mathrm{P}(B) = 1 - \dfrac{\binom{21}{4}}{\binom{28}{4}} \simeq 0,7}$.

2. **Deuxième méthode : on fait des tirages successifs sans remise.**

   a) *Ω est l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble des 28 dominos. Ainsi,* $\mathrm{Card}(\Omega) = 28\times 27$.
   Il a équiprobabilité sur Ω donc on le munit de la probabilité uniforme P.
   $\mathrm{Card}(A_0) = 7\times 6$ *donc* $\mathrm{P}(A) = \dfrac{7\times 7\times 6}{28\times 27} = \dfrac{2\times 3\times 7^2}{2^2\times 3^3\times 7} = \boxed{\dfrac{7}{18}}$.

   b) *Ω' est l'ensemble des 4-arrangements de l'ensemble des 28 dominos. Ainsi,* $\mathrm{Card}(\Omega') = \dfrac{28!}{24!}$.
   Il a équiprobabilité sur Ω' donc on le munit de la probabilité uniforme P.
   $\mathrm{Card}(\overline{B}) = \dfrac{21!}{17!}$ *donc* $\mathrm{P}(\overline{B}) = \dfrac{21\times 20\times 19\times 18}{28\times 27\times 26\times 25} = \dfrac{19}{13\times 5} = \dfrac{19}{\underline{65}}$, *donc* $\boxed{\mathrm{P}(B) = \dfrac{46}{65} \simeq 0,7}$.

Exercice 12. Paradoxe des anniversaires. *Sachant qu'une année comporte toujours 365 jours, quelle est la probabilité qu'au moins deux Pistons 2 aient leur anniversaire le même jour ?*

Correction. *On pose $p = 42$ le cardinal de la classe de Piston 2 et A_p l'évènement d'intérêt.*
On considère $\Omega = \left\{p\text{-listes de } [\![1, 365]\!]\right\}$ muni de la probabilité uniforme.
On a $\operatorname{Card} \Omega = 365^p$.
On va déterminer la probabilité que tous les élèves aient leur anniversaire à des jours différents i.e. $\mathrm{P}(\overline{A_p})$.
L'événement $\overline{A_p}$ est $\left\{p\text{-arrangements de } [\![1, 365]\!]\right\}$, de cardinal

$$\operatorname{Card}(\overline{A_p}) = 365(365-1)\cdots(365-p+1) = \frac{365!}{(365-p)!} = p!\binom{365}{p},$$

et de probabilité

$$\mathrm{P}(\overline{A_p}) = \frac{\operatorname{Card}(\overline{A_p})}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \frac{365(365-1)\cdots(365-p+1)}{365^p} = \frac{p!\binom{365}{p}}{365^p}.$$

La probabilité cherchée vaut (ici pour $p = 42$)

$$\boxed{\mathrm{P}(A_p) = 1 - \frac{p!\binom{365}{p}}{365^p} \approx 0{,}91}.$$

Exercice 13. Urne multicolore. *Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, ..., N_k de couleur c_k. On a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$. On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_1 boules de couleur c_1, n_2 boules de couleur c_2, ..., n_k boules de couleur c_k (où $n_1 + \cdots + n_k = n$). Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise.*

- **Tirage simultané :** $\boxed{p = \dfrac{\binom{N_1}{n_1}\cdots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}}$.
- **Tirages successifs avec remise :** $\boxed{p = \dfrac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\dfrac{N_1^{n_1}\ldots N_k^{n_k}}{N^n}}$.
- **Tirages successifs sans remise :** $\boxed{p = \dfrac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\dfrac{A_{N_1}^{n_1}\ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n} = \dfrac{\binom{N_1}{n_1}\cdots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}}$.

Exercice 14. Tirages (strictement) croissants. *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.*

1. *On tire successivement **sans** remise p boules. Déterminer la probabilité de l'événement A : « obtenir des numéros en ordre (strictement) croissant ».*

2. *On tire successivement **avec** remise p boules. Déterminer la probabilité de l'événement B : « obtenir des numéros en ordre strictement croissant ».*

3. *On tire successivement **avec** remise p boules. Déterminer la probabilité de l'événement C : « obtenir des numéros en ordre croissant ».*

Correction. *On note $\mathcal{U} = \{B_1, \dots, B_p\}$ l'urne des p boules numérotées.*

1. *Le tirage est successif sans remise.*
   Considérons $\Omega = \Big\{p\text{-arrangements de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   Comme P est uniforme, on a $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$ où $\operatorname{Card} \Omega = n(n-1)\cdots(n-p+1) = p!\binom{n}{p}$.
   Se donner une issue de A (c'est-à-dire un tirage croissant) revient à se donner une partie à p éléments de $\mathcal{U}$.
   Ainsi,
   $$\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{n}{p}}{p!\binom{n}{p}} = \frac{1}{p!}}.$$

2. *Le tirage est successif avec remise.*
   Considérons $\Omega = \Big\{p\text{-listes de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   Comme P est uniforme, on a $\mathrm{P}(B) = \dfrac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega}$ où $\operatorname{Card} \Omega = n^p$.
   Se donner une issue de B (c'est-à-dire un tirage croissant) revient à se donner une partie à p éléments de $\mathcal{U}$.
   Ainsi,
   $$\boxed{\mathrm{P}(B) = \frac{\binom{n}{p}}{n^p}}.$$

3. *Cette question est difficile.*
   On cherche le nombre de p-listes croissantes au sens large de $[\![1, n]\!]$.
   Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des p-listes strictement croissantes de $[\![1, n+p-1]\!]$ via
   $$(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p) \longmapsto (x_1 < x_2 + 1 < \cdots < x_p + (p-1))$$
   Je vous laisse comprendre que :
   $$\boxed{\mathrm{P}(C) \;=\; \frac{\binom{n+p-1}{p}}{n^p}}.$$

Exercice 15. File d'attente. *On considère $n \geq 2$ personnes dont A et B.*
Elles s'alignent au hasard dans une file.
Soit $r \in [\![0, n-2]\!]$.
Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement r personnes entre A et B ?

Correction. *On numérote de 1 à n les places dans la file.*
Considérons $\Omega = \left\{2\text{-arrangements de } [\![1, n]\!]\right\}$ muni de la probabilité uniforme.
Une issue ω est par exemple $(4,2)$ et cela signifie que A est en $4^{\text{ème}}$ position et B en $2^{\text{ème}}$.
On a $\mathrm{Card}(\Omega) = n(n-1)$.
L'événement E_r : « il y a r personnes entre A et B » est réalisé si A et B (sans ordre) sont aux places $(k, k+r+1)$, avec $1 \leq k \leq n-r-1$.
On obtient $\mathrm{Card}(E_r) = 2(n-r-1)$, puis $\boxed{\mathrm{P}(E_r) = \dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}}$.

Solution très légèrement différente.
On prend pour Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de la probabilité uniforme.
On commence par traiter le cas où A vient avant B.
Et on dit que l'autre cas est analogue, d'où $\mathrm{P}(E_r) = 2 \times$ proba précédente.
Lorsque A est avant B, il y a $n-r-1$ places possibles pour A.
Ensuite B est fixé.
Puis, il y a $(n-2)!$ façons de placer les autres personnes.
D'où une probabilité de $\dfrac{(n-r-1)(n-2)!}{n!}$.
D'où

$$\boxed{\mathrm{P}(E_r) \;=\; 2\frac{(n-r-1)(n-2)!}{n!}}.$$

Exercice 16. Records. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On vide l'urne en prélevant ces jetons au hasard, un par un, et sans remise. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on dit que le k-ième tirage est un record si le k-ième jeton tiré porte un numéro plus grand que tous les numéros tirés avant.*
Par convention, le résultat du premier tirage est considéré comme un record.

1. (a) *Proposer un univers et une probabilité modélisant l'expérience.*
   (b) *Calculer, pour tous $k, p \in [\![1, n]\!]$, la probabilité de l'évènement « le k-ième tirage est un record et porte le numéro p ». (On distinguera les cas $p < k$ et $p \geq k$).*
   (c) *Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a*
   $$\sum_{p=k}^{n} \binom{p-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$
   (d) *En déduire, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité que le k-ième tirage soit un record.*
2. (a) *Calculer les probabilités que, durant la totalité des tirages, on assiste exactement à :*
   (b) *n records ;*
   (c) *un seul record ;*
   (d) *deux records.*

Correction.

1. (a) *Dans cette expérience, une issue est un n-arrangement des éléments de $[\![1,n]\!]$, autrement dit, une permutation de $[\![1,n]\!]$. On pose donc* $\boxed{\Omega \text{ l'ensemble des permutations de } [\![1,n]\!]}$.

   Chacune des issues étant équiprobable, on munit Ω de la probabilité uniforme. On a $\boxed{|\Omega| = n!}$.

   (b) *Soit $(k,p) \in [\![1,n]\!]^2$. Notons $A_{k,p}$ l'évènement « le k-ième tirage porte le numéro p », et R_k l'évènement « le k-ième tirage est un record ». Nous cherchons donc la probabilité de l'évènement $A_{k,p} \cap R_k$.*

   - *Si $p < k$ et si l'évènement $A_{k,p}$ est réalisé, alors il y a nécessairement un numéro supérieur à p qui a été tiré avant le k-ième tirage (en effet, il y a eu $k-1$ tirages et il n'y a que $p-1$ numéros strictement inférieurs à p). Par conséquent, il ne peut y avoir record au k-ième tirage : $A_{k,p}$ et R_k sont incompatibles et* $\boxed{\mathrm{P}(A_{k,p} \cap R_k) = 0}$.
   - *Si $p \geq k$, alors l'évènement $A_{k,p} \cap R_k$ est réalisé ssi tous les numéros tirés avant le k-ième tirage sont inférieurs à p. Un tel évènement s'écrit donc comme un $(k-1)$-arrangement parmi les $(p-1)$ numéros strictement inférieurs à p, puis le tirage du numéro p, et enfin $(n-k)$ arrangements parmi les $(n-k)$ numéros restants. Par conséquent,*

   $$|A_{k,p} \cap R_k| = \frac{p-1}{((p-1)-(k-1))!} \times 1 \times (n-k)! = (k-1)!\binom{p-1}{k-1}(n-k)!,$$

   et

   $$\mathrm{P}(A_{k,p} \cap R_k) = \frac{|A_{k,p} \cap R_k|}{|\Omega|} = \frac{k!\binom{p-1}{k-1}(n-k)!}{kn!} = \boxed{\frac{\binom{p-1}{k-1}}{k\binom{n}{k}}}.$$

   Remarque. *Cette dernière formule convient dans les deux cas, car par convention sur les coefficients binomiaux $\binom{p-1}{k-1} = 0$ lorsque $k > p$.*

   (c) *Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Pour tout $p \in [\![k,n]\!]$, on a $\binom{p-1}{k-1} = \binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}$ par la formule de Pascal. D'où par simplification télescopique, on obtient*

   $$\sum_{p=k}^{n}\binom{p-1}{k-1} = \sum_{p=k}^{n}\left[\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right] = \binom{n}{k} - \underbrace{\binom{k-1}{k}}_{=0} = \binom{n}{k},$$

   (formule de Pascal généralisée).

   (d) *Soit $k \in [\![1,n]\!]$. La famille des évènements $(A_{k,p})_{p \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements. Par conséquent :*

   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_k) &= \sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k,p} \cap R_k) = \sum_{p=1}^{k-1}\underbrace{\mathrm{P}(A_{k,p} \cap R_k)}_{=0} + \sum_{p=k}^{n}\mathrm{P}(A_{k,p} \cap R_k) \\ &= \sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{p-1}{k-1}}{k\binom{n}{k}} = \frac{1}{k\binom{n}{k}}\sum_{p=k}^{n}\binom{p-1}{k-1} = \frac{\binom{n}{k}}{k\binom{n}{k}} \\ &= \boxed{\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

2. (a) *Il y a n records ssi il y a record à chaque tirage, i.e. ssi l'issue est $(1, 2, \dots, n)$.*
Par conséquent, une seule issue convient et $\boxed{\text{la probabilité qu'on assiste à } n \text{ records vaut } \frac{1}{n!}}$.

(b) *S'il n'y a qu'un seul record, alors celui-ci est nécessairement obtenu au premier tirage. De plus, lorsque le jeton n est tiré, il y a record. Il doit donc être tiré en premier.*
Réciproquement, si le jeton n est tiré en premier, alors il n'y aura pas de record ensuite, les autres jetons ayant tous des numéros strictement inférieurs à n.
Donc l'évènement « il y a un seul record » est égal à l'évènement $A_{1,n}$ qui est égal à l'évènement $A_{1,n} \cap R_1$, dont la probabilité vaut $\boxed{\frac{1}{n}}$.

(c) *S'il y a deux records, le jeton n n'est pas tiré en premier (d'après ce qui précède).*
Dans ce cas, il y a alors record au premier tirage (convention) et au tirage où le numéro n est tiré. Pour que ces deux tirages soient les seuls records, il faut et il suffit que les jetons tirés entre le deuxième et le tirage précédent celui du jeton n portent tous des numéros strictement inférieurs à celui du premier tirage.
Pour $k \in [\![2, n]\!]$, notons B_k l'évènement « il y a exactement deux records, l'un au premier tirage, l'autre au k-ième ».
Un élément de B_k est un n-uplet avec, d'abord, $(k-1)$ éléments de $[\![1, n-1]\!]$ ($\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles), le plus grand étant placé en premier, les $k-2$ suivants dans un ordre quelconque ($(k-2)!$ possibilités), puis le jeton n, et enfin, un $(n-k)$-arrangement des $(n-k)$ numéros restants.
On en déduit que
$$|B_k| = \binom{n-1}{k-1}(k-2)!(n-k)! = \frac{(n-1)!}{k-1},$$
et
$$\mathrm{P}(B_k) = \frac{|B_k|}{|\Omega|} = \frac{1}{n(k-1)}.$$
L'évènement B : « il y a deux tirages » étant la réunion disjointe des B_k, $k \in [\![2, n]\!]$, on a :
$$\mathrm{P}(B) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(k-1)} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}.$$

Exercice 17. Théâtre. *Dix personnes, en quittant un théâtre, retirent du vestiaire un manteau parmi les dix derniers manteaux accrochés, sans faire attention s'ils en sont bien les propriétaires. Quelle est la probabilité qu'au moins huit personnes sur dix récupèrent leur manteau ?*

Correction. *Numérotons les manteaux et les personnes. Notons $a_i = j$ pour signifier que le $i$ème manteau est attribuée à la $j$ème personne.*
$\Omega = \{(a_1, \dots, a_{10}), a_i \in [\![1, 10]\!]\}$ *sans répétition. Ω est donc l'ensemble des 10-arrangements de $[\![1, 10]\!]$ i.e. l'ensemble des permutations d'un ensemble à 10 éléments et $\underline{\mathrm{Card}(\Omega) = 10!}$.*
On munit Ω de la probabilité uniforme car les manteaux sont récupérés au hasard.
Notons A l'évènement : « au moins 8 personnes sur 10 ont le bon manteau » $= A_8 \sqcup A_9 \sqcup A_{10}$ où A_i est l'évènement « exactement i personnes ont le bon manteau », et les unions sont disjointes.
On a : $\mathrm{Card}(A_{10}) = 1$, $\mathrm{Card}(A_9) = 0$, *et* $\mathrm{Card}(A_8) = \binom{10}{2} = 45$ *(il y a deux personnes qui échangent leur manteau), donc* $\underline{\mathrm{Card}(A) = 46}$ *puis* $\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{46}{10!} \simeq 1{,}27 \times 10^{-5}}$.

Rq : A_9 est l'évènement impossible.

Exercice 18. Jeu de cartes. *On mélange un jeu de 52 cartes.*

1. *Quelle est la probabilité que cartes rouges et noires alternent dans tout le jeu ?*
2. *Quelle est la probabilité que deux rois ne soient jamais côte à côte ?*

Correction. *L'univers Ω est l'ensemble des permutations du jeu de 52 cartes. On le munit de la probabilité uniforme. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 52!$.*

1. *Il y a deux types de jeux de 52 cartes dans lesquels cartes rouges et noires alternent : ceux qui commencent par une carte rouge, et ceux qui commencent par une carte noire. Dans un cas comme dans l'autre, le jeu est parfaitement défini par la configuration des cartes rouges d'un côté, et noires de l'autre. Chacune des deux est donnée par une permutation d'un ensemble à 26 éléments, donc il y a $(26!)^2$ jeux de cartes où rouges et noires alternent, en commençant par les rouges, et autant de jeux où les couleurs alternent, en commençant par les noires. Il y a donc $2 \times (26!)^2$ tels jeux, et la probabilité recherchée est $\boxed{\dfrac{2 \times (26!)^2}{52!} = \dfrac{2}{\binom{52}{26}}}$.*

2. *Pour construire un jeu de cartes sans rois adjacents, on peut procéder successivement :*
   (a) *On choisit d'abord l'ordre des cartes qui ne sont pas des rois, sans contrainte : il y a $48!$ possibilités.*
   (b) *On choisit l'ordre des rois, sans contrainte : il y a $4!$ possibilités.*
   (c) *On choisit la manière d'insérer les rois dans le jeu. Chaque roi s'insère à gauche de la première carte, entre deux cartes ou à droite de la dernière : il y a donc 49 positions possibles. Puisque l'ordre des rois est déjà déterminé et que deux rois ne peuvent pas occuper la même position (ils seraient adjacents dans le jeu final), il y a $\binom{49}{4}$ insertions possibles.*

   Légère variante : *on peut remplacer les étapes (b) et (c) par :*

   - *on choisit la place du premier roi (49 possibilités),*
   - *celle du deuxième roi (48 possibilités),*
   - *celle du troisième roi (48 possibilités),*
   - *et du quatrième (47 possibilités),*

   ce qui revient à compter les 4-arrangements d'un ensemble à 49 éléments : il y a $\dfrac{(49)!}{(45)!} = 4!\binom{49}{4}$.

   Dans tous les cas, on obtient donc $48! \times 4! \times \binom{49}{4} = 48! \times 4! \times \frac{49!}{4!\,45!} = 46 \times 47 \times 48 \times 49!$ jeux différents, ce qui donne une probabilité de $\boxed{\dfrac{46 \times 47 \times 48 \times 49!}{52!} = \dfrac{46 \times 47 \times 48}{50 \times 51 \times 52} = \dfrac{4 \times 23 \times 47}{5^2 \times 13 \times 17} \approx 78{,}26\%}$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 19. *Soient A et B deux évènements de Ω tels que* $\mathrm{P}(A) = 0,4$ *et* $\mathrm{P}(B) = 0,6$ *et* $\mathrm{P}_{\overline{A}}(B) = 0,4$. *Calculer* $\mathrm{P}_A(B)$, $\mathrm{P}(A \cup B)$ *et* $\mathrm{P}_{\overline{B}}(A)$.

Correction.

- *Par définition :* $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$.
  D'après la formule des probabilités totales, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathrm{P}(\overline{A}) = 0,6 - 0,4 \times 0,6 = 0,6 \times 0,6 = 0,36$. $\boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = 0,36}$.
  Ainsi, $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{0,36}{0,4} = \dfrac{36}{40} = \dfrac{4 \times 9}{4 \times 10} = 0,9$. $\boxed{\mathrm{P}_A(B) = 0,9}$.
- *D'après la formule de Poincaré :* $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 1 - 0,36 = 0,64$. $\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = 0,64}$.
- $\mathrm{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{\mathrm{P}(\overline{B} \cap A)}{\mathrm{P}(\overline{B})}$. *Or,* $\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B) = 0,4$ *et* $\mathrm{P}(\overline{B} \cap A) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B \cap A) = 0,4 - 0,36 = 0,04$. *Ainsi,* $\mathrm{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{0,04}{0,4} = 0,1$. $\boxed{\mathrm{P}_{\overline{B}}(A) = 0,1}$.

Exercice 20. Deux enfants. *Mme Malbet a deux enfants.*

1. *L'ainée est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?*
2. *L'un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?*

Correction. *Considérons* $\Omega = \{(F, F); (F, G); (G, F); (G, G)\}$ *muni de la probabilité uniforme.*

1. *Posons* $A = \{(F, F); (F, G)\}$ *et* $B = \{(F, F)\}$. *La probabilité cherchée est* $\boxed{\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{1}{2}}$.
2. *Posons* $C = \{(G, F); (F, G); (G, G)\}$ *et* $D = \{(G, G)\}$. *La probabilité cherchée est* $\boxed{\mathrm{P}_C(D) = \dfrac{1}{3}}$.

Exercice 21. Assurance. *Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges : moins de 25 ans, de 25 ans à 50 ans et plus de 50 ans. Le tableau ci-dessous fournit deux informations : la proportion d'assurés appartenant à chaque classe et la probabilité qu'un assuré d'une classe donnée déclare au moins un accident au cours de l'année.*

Classe	**proportion**	**probabilité**
moins de 25 ans	*0,25*	*0,12*
de 25 à 50 ans	*0,53*	*0,06*
plus de 50 ans	*0,22*	*0,09*

1. *Un assuré est choisi au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit âgé d'au plus 25 ans ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'un assuré âgé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année ?*
4. *Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?*

Correction.

1. *Notons T_1, T_2 et T_3 les 3 tranches d'âge et D l'évènement « l'assuré déclare au moins un accident ».*
On peut faire un arbre avec $\{T_1, T_2, T_3\}$ puis $\{D, \overline{D}\}$.
D'après l'énoncé, on a : $\mathrm{P}(T_1) = 0,25$, $\mathrm{P}(T_2) = 0,53$, $\mathrm{P}(T_3) = 0,22$, $\mathrm{P}_{T_1}(D) = 0,12$, $\mathrm{P}_{T_2}(D) = 0,06$ *et* $\mathrm{P}_{T_3}(D) = 0,09$.
$\{T_1, T_2, T_3\}$ *forment un système complet d'évènements donc la formule des probabilités totales donne :* $\mathrm{P}(D) = ... = \dfrac{1}{10000}(300+318+198) = \dfrac{816}{10000} = 0,0816$. *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{P}(D) = 0,0816}$.

2. $\mathrm{P}_D(T_1) = \dfrac{300}{816} = \dfrac{3 \times 2^2 \times 5^2}{2^4 \times 3 \times 17} = \dfrac{25}{4 \times 17} = \dfrac{25}{68}$, *i.e.* $\boxed{\mathrm{P}_D(T_1) = \dfrac{25}{68}}$.

3. $\mathrm{P}_{T_2 \sqcup T_3}(D) = \dfrac{\mathrm{P}(D \cap (T_2 \sqcup T_3))}{\mathrm{P}(T_2 \sqcup T_3)}$.
Or, $\mathrm{P}(T_2 \sqcup T_3) = \mathrm{P}(T_2) + \mathrm{P}(T_3) = 0,75$ *car l'union est disjointe.*
Et, $\mathrm{P}(D \cap (T_2 \sqcup T_3)) = \mathrm{P}((D \cap T_2) \sqcup (D \cap T_3)) = \mathrm{P}(D \cap T_2) + \mathrm{P}(D \cap T_3) = \dfrac{516}{10000}$.
Ainsi, $\mathrm{P}_{T_2 \sqcup T_3}(D) = \dfrac{516}{7500} = \dfrac{3 \times 2^2 \times 43}{3 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^2} = \dfrac{43}{225}$, *i.e.* $\boxed{\mathrm{P}_{T_2 \sqcup T_3}(D) = \dfrac{43}{225}}$.

4. $\mathrm{P}_{\overline{D}}(T_2) = \dfrac{\mathrm{P}(T_2 \cap \overline{D})}{\mathrm{P}(\overline{D})} = \dfrac{\mathrm{P}(T_2) - \mathrm{P}(T_2 \cap D)}{1 - \mathrm{P}(D)} = \dfrac{0,53 - 0,0318}{0,9184} = \dfrac{0,4982}{0,9184} = \dfrac{4982}{9184} = \dfrac{2491}{4592}$.

Exercice 22. Avec remise de la couleur tirée. *Une urne contient initialement une boule blanche et une rouge.*
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A_{n,k}$ l'événement « on a tiré k boules blanches lors des n premiers tirages ».

1. *Déterminer, pour tout k, la probabilité de $A_{1,k}$.*
2. *Déterminer, pour tout k, la probabilité de $A_{2,k}$.*
3. *Soit n fixé.*
   Émettre une conjecture concernant la probabilité de $A_{n,k}$.
4. *Prouver votre conjecture par récurrence sur n.*

Correction.

1. *On a*
$$\boxed{\mathrm{P}(A_{1,k}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}}.$$

2. • *On a l'égalité d'évènements :*
$$A_{2,0} \ = \ R_1 \cap R_2.$$
D'où
$$\boxed{\mathrm{P}(A_{2,0}) \ = \ \mathrm{P}(R_1) \times \mathrm{P}_{R_1}(R_2) \ = \ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \ = \ \frac{1}{3}}.$$
   • *Idem pour $A_{2,2}$ car les boules rouges et blanches jouent le même rôle. Donc* $\boxed{\mathrm{P}(A_{2,2}) \ = \ \frac{1}{3}}$.
   • *On a l'égalité d'évènements :*
$$A_{2,1} \ = \ (B_1 \cap R_2) \ \cup \ (R_1 \cap B_2).$$
D'où
$$\boxed{\mathrm{P}(A_{2,1}) \ = \ \mathrm{P}(B_1 \cap R_2) + \mathrm{P}(R_1 \cap B_2) \ = \ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \ + \ \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{3}}.$$
   • *Et* $\boxed{\text{pour tout } k \geq 3, \text{ on a } \mathrm{P}(A_{2,k}) = 0}$.

3. *On conjecture que*
$$\boxed{\mathrm{P}(A_{n,k}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}}.$$

4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que* $\boxed{\text{pour tout } k \geq n+1, \text{ on a } A_{n,k} = \varnothing, \text{ donc } \mathrm{P}(A_{n,k}) = 0}$.

Désormais prouvons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathcal{H}_n : \text{ « } \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}(A_{n,k}) = \frac{1}{n+1} \text{ »}$$

Initialisation. *A la première question, on a montré que $\mathcal{H}_1$ est vraie.*

Hérédité. *Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$.*

Utilisons le système complet d'événements $(A_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathrm{P}(A_{n+1,k}) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(A_{n,i} \cap A_{n+1,k})$$

Dans cette somme, il n'y a que deux termes non nuls :

$$\mathrm{P}(A_{n+1,k}) = \mathrm{P}(A_{n,k-1} \cap A_{n+1,k}) \; + \; \mathrm{P}(A_{n,k} \cap A_{n+1,k}).$$

De plus, on a l'égalité d'évènements :

$$A_{n,k-1} \cap A_{n+1,k} = A_{n,k-1} \cap B_{n+1} \qquad \text{et} \qquad A_{n,k} \cap A_{n+1,k} = A_{n,k} \cap R_{n+1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_{n+1,k}) &= \mathrm{P}(A_{n,k-1} \cap B_{n+1}) \; + \; \mathrm{P}(A_{n,k} \cap R_{n+1}) \\ &= \mathrm{P}(A_{n,k-1})\mathrm{P}_{A_{n,k-1}}(B_{n+1}) \; + \; \mathrm{P}(A_{n,k})\mathrm{P}_{A_{n,k}}(R_{n+1}). \end{aligned}$$

Utilisons $\mathcal{H}_n$ pour $\mathrm{P}(A_{n,k-1})$ et $\mathrm{P}(A_{n,k})$.
Pour cela, il faut que $k-1$ et k soient dans $[\![0, n]\!]$, c'est-à-dire $k \in [\![1, n]\!]$.

Distinguons donc plusieurs cas. Avant de commencer, examinons la composition de l'urne à un temps t donné.
***Après** le $n^{\text{ème}}$ tirage (ou **avant** le $n+1^{\text{ème}}$ tirage), il y a $n+2$ boules dans l'urne.*
Si $A_{n,j}$ est réalisé, alors l'urne contient $j+1$ boules blanches, donc $n+2-(j+1) = n-j+1$ boules rouges.

▷ *Si $k = 0$, alors*

$$\mathrm{P}(A_{n+1,0}) = \underbrace{\mathrm{P}(A_{n,0})}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}} \underbrace{\mathrm{P}_{A_{n,0}}(R_{n+1})}_{= \frac{n-0+1}{n+2}} = \frac{1}{n+2}.$$

▷ *Si $k = n+1$, alors*

$$\mathrm{P}(A_{n+1,n+1}) = \underbrace{\mathrm{P}(A_{n,n})}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}} \underbrace{\mathrm{P}_{A_{n,n}}(B_{n+1})}_{= \frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{n+2}.$$

▷ *Si $k \in [\![1, n]\!]$, alors*

$$\mathrm{P}(A_{n+1,k}) = \underbrace{\mathrm{P}(A_{n,k-1})}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}} \mathrm{P}_{A_{n,k-1}}(B_{n+1}) + \underbrace{\mathrm{P}(A_{n,k})}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}} \mathrm{P}_{A_{n,k}}(R_{n+1}).$$

Or

$$\mathrm{P}_{A_{n,k-1}}(B_{n+1}) = \frac{(k-1)+1}{n+2} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{P}_{A_{n,k}}(R_{n+1}) = \frac{n-k+1}{n+2}.$$

D'où

$$\mathrm{P}(A_{n+1,k}) = \frac{1}{n+1}\frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{n-k+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Bilan : les trois cas précédents montrent que

$$\forall\, k \in [\![0, n+1]\!], \quad \mathrm{P}(A_{n+1,k}) = \frac{1}{n+2},$$

c'est-à-dire $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. *D'après le principe de récurrence :* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{H}_n$ *est vraie.*

Exercice 23. Urnes. *On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. L'urne numéro k contient k boules rouges et $n-k$ boules blanches. On choisit au hasard une des n urnes puis on tire successivement deux boules dans cette urne.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsque les tirages s'effectuent avec remise ?*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsque les tirages s'effectuent sans remise ?*
3. *Calculer les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini.*

Correction. *On note R l'évènement « tirer deux boules rouges », R_1 (resp. R_2) l'évènement « tirer une boule rouge au premier (resp. second) tirage » et U_k l'évènement « choisir l'urne k ».*
$(U_k)_{1\leq k\leq n}$ forme un système complet d'évènements donc d'après les formules des probabilités totales et composées, on a :

$$\mathrm{P}(R) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(R \cap U_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(U_k)\mathrm{P}_{U_k}(R) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{U_k}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{U_k}(R_1)\mathrm{P}_{U_k \cap R_1}(R_2).$$

1. *Dans le cas de tirages avec remise on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}_{U_k}(R_1) = \dfrac{k}{n}$ et $\mathrm{P}_{U_k \cap R_1}(R_2) = \dfrac{k}{n}$, donc :*
$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}.$$

2. *Dans le cas de tirages sans remise on a pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}_{U_k \cap R_1}(R_2) = \dfrac{k-1}{n-1}$, *donc :*

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k}{(n-1)n^2} = \frac{1}{(n-1)n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{(n-1)n^2}\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{(n-1)n} \times \frac{n-1}{3} = \boxed{\frac{n+1}{3n}}.$$

3. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_1 = \frac{1}{3}}$ *et* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_2 = \frac{1}{3}}$, *ce qui prouve que lorsque* n *tend vers l'infini, effectuer des tirages avec ou sans remise a peu d'incidence sur le calcul de cette probabilité.*

Exercice 24. Trésor au château de Versailles. *Le château contient* N *coffres.*
Le roi Louis XIV a mis, avec probabilité p, *le trésor dans un des coffres, tiré au sort, et avec probabilité* $1-p$, *il l'a confié à son conseiller, Jean-Baptiste Colbert.*
Un passant a ouvert les $N-1$ *premiers coffres, sans succès.*
Quelle est la probabilité pour qu'il trouve le trésor dans le dernier coffre ?

Correction.

Analyse du sujet. *On admet qu'il existe un espace probabilisé fini* (Ω, P) *et des événements* B *et* $C_1, \ldots, C_N$ *tels que*

- *la famille* $(C_1, \ldots, C_N, B)$ *soit un système complet d'événements*
- *quel que soit* $i \in [\![1, N]\!]$, *on a* $\mathrm{P}(C_i) = \frac{p}{N}$
- $\mathrm{P}(B) = 1 - p$.

La question revient à déterminer :

$$\mathrm{P}(C_N \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}).$$

Réponse. *On a*

$$\mathrm{P}(C_N \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}) \;=\; \frac{\mathrm{P}(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}} \cap C_N)}{\mathrm{P}(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}})}.$$

La famille $(C_1, \ldots, C_N, B)$ *est un système complet d'événements, donc l'intersection des complémentaires* $\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}$ *est simplement égale à* $C_N \sqcup B$.
En particulier, $\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}} \cap C_N = (C_N \sqcup B) \cap C_N = C_N$.

Le calcul se simplifie donc grandement :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C_N \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}) &= \frac{\mathrm{P}(C_N)}{\mathrm{P}(C_N \sqcup B)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(C_N)}{\mathrm{P}(C_N) + \mathrm{P}(B)} \\ &= \frac{\frac{p}{N}}{\frac{p}{N} + (1-p)} \\ &= \frac{p}{p + N(1-p)}.\end{aligned}$$

Exercice 25. Téléphone. *Blaise est distrait et il ne fait pas très attention à son téléphone portable, qui peut ne pas être en sa possession pendant plusieurs jours sans qu'il s'en aperçoive (i.e. s'il l'a oublié un jour, alors il ne l'a plus pour le reste de la semaine).*
Chaque jour, si Blaise a son téléphone en début de journée, il a la probabilité $p \in]0,1[$ de l'oublier pendant la journée.

1. *L'évènement L « il a oublié son téléphone le lundi » et l'évènement M « il a oublié son téléphone le mardi » sont-il indépendants ?*
2. *Écrire l'évènement S « il a oublié son téléphone durant la semaine de travail », à l'aide des évènements L, M, Me, J, V ou de leurs évènements contraires. En déduire la probabilité de S.*
3. *Justement, ce samedi matin très tôt, il veut téléphoner mais il ne retrouve plus son téléphone. Il est cependant certain de l'avoir eu en sa possession lundi matin.*
   (a) *Quelle est la probabilité que Blaise ait oublié son téléphone dans la journée de lundi ?*
   (b) *Quel est le jour le plus probable où eut lieu cet oubli ?*

Correction.

1. *Comme $p \in]0,1[$, on a $\mathrm{P}(L) = p \neq 0$ et $\mathrm{P}(\overline{L}) = 1 - p \neq 0$. On peut donc s'intéresser à $\mathrm{P}_L(M)$ et $\mathrm{P}_{\overline{L}}(M)$.*
   Si Blaise a oublié son téléphone le lundi, il ne peut l'oublier le mardi donc $\mathrm{P}_L(M) = 0$. On en déduit que $\underline{\mathrm{P}(M \cap L) = 0}$.
   S'il ne l'a pas oublié lundi, il a la probabilité p de l'oublier le mardi : $\mathrm{P}_{\overline{L}}(M) = p$ donc
   $\underline{\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(M \cap L) + \mathrm{P}(M \cap \overline{L}) = 0 + \mathrm{P}(\overline{L})\mathrm{P}_{\overline{L}}(M) = p(1-p)}$.
   De plus, $\mathrm{P}(L) = p$ donc $\underline{\mathrm{P}(L)\mathrm{P}(M) = p^2(1-p) \neq 0 = \mathrm{P}(M \cap L)}$ donc $\boxed{L \text{ et } M \text{ ne sont pas indépendants}}$.
2. *On a $S = L \sqcup M \sqcup Me \sqcup J \sqcup V$.*
   Première méthode. *Les unions étant disjointes, on a $\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(L) + \mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(Me) + \mathrm{P}(J) + \mathrm{P}(V)$, où $\mathrm{P}(L)$ et $\mathrm{P}(M)$ ont déjà été calculés.*
   De plus, $\mathrm{P}(Me) = \mathrm{P}(Me \cap \overline{M} \cap \overline{L}) = p(1-p)^2$, $\mathrm{P}(J) = \mathrm{P}(J \cap \overline{Me} \cap \overline{M} \cap \overline{L}) = p(1-p)^3$ et $\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}(V \cap J \cap \overline{Me} \cap \overline{M} \cap \overline{L}) = p(1-p)^4$.
   Ainsi, $\boxed{\mathrm{P}(S) = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + p(1-p)^4 = p \times \frac{1-(1-p)^5}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^5}$.
   Deuxième méthode. *Alors $\overline{S} = \overline{L} \cap \overline{M} \cap \overline{Me} \cap \overline{J} \cap \overline{V}$, et d'après la formule des probabilités com-*

posées, on a :

$$\mathrm{P}(\overline{S}) = \mathrm{P}(\overline{L})\mathrm{P}_{\overline{L}}(\overline{M})\mathrm{P}_{\overline{L}\cap\overline{M}}(\overline{Me})\mathrm{P}_{\overline{L}\cap\overline{M}\cap\overline{Me}}(\overline{J})\mathrm{P}_{\overline{L}\cap\overline{M}\cap\overline{Me}\cap\overline{J}}(\overline{V}) = (1-p)^5,$$

donc $\boxed{\mathrm{P}(S) = 1-(1-p)^5}$.

3. (a) *La probabilité recherchée est* $\boxed{\mathrm{P}_S(L) = \dfrac{\mathrm{P}(S\cap L)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{\mathrm{P}(L)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{p}{1-(1-p)^5}}$.

   (b) *De même,* $\mathrm{P}_S(M) = \dfrac{\mathrm{P}(S\cap M)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{\mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^5}$.
   $\mathrm{P}_S(Me) = \dfrac{\mathrm{P}(S\cap Me)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{\mathrm{P}(Me)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^5}$.
   $\mathrm{P}_S(J) = \dfrac{\mathrm{P}(S\cap J)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{\mathrm{P}(J)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{p(1-p)^3}{1-(1-p)^5}$.
   $\mathrm{P}_S(V) = \dfrac{\mathrm{P}(S\cap V)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{\mathrm{P}(V)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{p(1-p)^4}{1-(1-p)^5}$.
   On a $0 < 1-p < 1$ *et* $p > 0$ *donc* $p(1-p)^4 < p(1-p)^3 < p(1-p)^2 < p(1-p) < p$ *donc*

$$\mathrm{P}_S(V) < \mathrm{P}_S(J) < \mathrm{P}_S(Me) < \mathrm{P}_S(M) < \mathrm{P}_S(L).$$

   En conclusion, $\boxed{\text{le jour le plus probable où eut lieu cet oubli est le lundi}}$.

Exercice 26. Téléphone arabe. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
Des individus $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *se transmettent un message.*
Chaque individu A_k *transmet le message à* A_{k+1} *de façon fidèle avec une probabilité* p *ou en envoyant le message contraire avec une probabilité* $1-p$.
Tous les individus se comportent de manière indépendante.
On note p_k *la probabilité pour que le message reçu par* A_k *soit le message initial de* A_0.
On pose $p_0 = 1$.

1. *Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la famille* $(p_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.
2. *En déduire la valeur de* p_n *et sa limite lorsque* n *tend vers l'infini.*

Correction.

1. *Pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, *notons* B_k *l'événement « l'individu* A_k *a reçu le bon message ».*
   On peut considérer que l'énoncé nous donne les informations suivantes :

   - $\mathrm{P}(B_0) = 1$;
   - $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathrm{P}(B_{k+1} \mid B_k) = p$;
   - $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathrm{P}(B_{k+1} \mid \overline{B}_k) = 1-p$.

   On trouve alors une relation de récurrence immédiate sur $(\mathrm{P}(B_k))_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_{k+1}) &= \mathrm{P}(B_{k+1} \mid B_k)\mathrm{P}(B_k) + \mathrm{P}(B_{k+1} \mid \overline{B}_k)\mathrm{P}(\overline{B}_k) \\
&= p\mathrm{P}(B_k) + (1-p)(1-\mathrm{P}(B_k)) \\
&= (2p-1)\mathrm{P}(B_k) + (1-p).
\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad p_{k+1} = (2p-1)p_k + (1-p)}.$$

2. *La suite (p_k) est donc une suite arithmético-géométrique. D'où*

   - ***Cas $p = 1$.*** *Alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = 1$.*
     En particulier, $p_n = 1$.
     Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
   - ***Cas $p \in [0, 1[$.*** *Alors $1/2$ est point fixe de $(p_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(p_k - 1/2)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une suite géométrique de raison $2p-1$ et de premier terme $p_0 - 1/2 = 1/2$, donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a $p_k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2p-1)^k$.*
     En particulier, on a $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$.
     - ⋆ *Si $p \in]0, 1[$, alors $2p-1 \in]-1, 1[$, donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.*
     - ⋆ *Si $p = 0$, alors $p_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$*

       Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 27. Let's make a deal. *Vous participez à un jeu où l'on vous propose trois portes au choix. L'une des portes cache une voiture à gagner, et chacune des deux autres une chèvre.*
Vous choisissez une porte, mais sans l'ouvrir ! L'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre une autre porte, derrière laquelle se trouve une chèvre. Il vous donne maintenant le choix entre : vous en tenir à votre choix initial, ou changer de porte. Qu'avez-vous intérêt à faire ? C'est un problème auquel étaient confrontés les invités du jeu télévisé Let's make a deal de Monty Hall (animateur et producteur américain).

Correction. *Supposons, sans perte de généralité, que la voiture est derrière la porte 1, les chèvres derrière les portes 2 et 3.*
Le jeu se déroule alors comme suit.

- *Sans changement de porte :*
  - *le spectateur choisit la porte 1, donc l'animateur ouvre indifféremment l'une des deux autres portes, et le spectateur gagne.*
  - *le spectateur choisit la porte 2, donc l'animateur ouvre la porte 3, et le spectateur perd.*
  - *le spectateur choisit la porte 3, donc l'animateur ouvre la porte 2, et le spectateur perd.*
- *Avec changement de porte :*
  - *le spectateur choisit la porte 1, l'animateur ouvre indifféremment l'une des deux autres portes, le spectateur ouvre l'autre et perd.*

- *le spectateur choisit la porte 2, donc l'animateur ouvre la porte 3, le spectateur ouvre la porte 1 et gagne.*
- *le spectateur choisit la porte 3, donc l'animateur ouvre la porte 2, le spectateur ouvre la porte 1 et gagne.*

Bilan : s'il change de porte, il gagne 2 fois sur 3, sinon seulement 1 fois sur 3.
Il vaut donc mieux changer de porte !

Indépendance

Exercice 28. Usine. *Une usine fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement* 50%, 30% *et* 20% *des composants. Le qualiticien de l'usine estime que :*

- 2% *des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux.*
- 3% *des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux.*
- 5% *des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.*

1. *Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?*
2. *Les évènements « la pièce est défectueuse » et « la pièce provient de M_1 » sont-ils indépendants ?*
3. *Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1 ?*

Correction.

1. *Notons, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, M_i l'évènement « l'objet prélevé a été fabriqué par la machine M_i » et D l'évènement « l'objet prélevé est défectueux ».*
D'après l'énoncé, on a : $\underline{\mathrm{P}(M_1) = 0,5}$, $\mathrm{P}(M_2) = 0,3$, $\mathrm{P}(M_3) = 0,2$, $\mathrm{P}_{M_1}(D) = 0,02$, $\mathrm{P}_{M_2}(D) = 0,03$ *et* $\mathrm{P}_{M_3}(D) = 0,05$.
La famille (M_1, M_2, M_3) forme un système complet d'évènements donc la formule des probabilités totales donne :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(D\cap M_1) + \mathrm{P}(D\cap M_2) + \mathrm{P}(D\cap M_3)\\ &= \mathrm{P}(M_1)\mathrm{P}_{M_1}(D) + \mathrm{P}(M_2)\mathrm{P}_{M_2}(D) + \mathrm{P}(M_3)\mathrm{P}_{M_3}(D)\\ &= 0,5\times 0,02 + 0,3\times 0,03 + 0,2\times 0,05\\ &= \frac{1}{1000}(10+9+10) = \frac{29}{1000} = 0,029.\end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\mathrm{P}(D) = 0,029}$.

2. *D'après le calcul précédent,* $\mathrm{P}(D\cap M_1) = \dfrac{10}{1000} = 0,01$.
Par ailleurs, $\mathrm{P}(D)\times\mathrm{P}(M_1) = 0,029\times 0,5 = 0,0145$.
Ainsi, $\underline{\mathrm{P}(D)\times\mathrm{P}(M_1) \neq \mathrm{P}(D\cap M_1)}$ *donc* $\boxed{D \text{ et } M_1 \text{ ne sont pas indépendants}}$.

3. *La probabilité recherchée est :* $\boxed{\mathrm{P}_D(M_1)} = \dfrac{\mathrm{P}(D \cap M_1)}{\mathrm{P}(D)} = \dfrac{0,01}{0,029} = \boxed{\dfrac{10}{29}}$.

Exercice 29. Pile ou face. *On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?*

Correction. *L'univers Ω est l'ensemble des n-listes d'éléments de $\{pile, face\}$. On le munit d'une probabilité P.*

1. *Notons A l'évènement « obtenir au moins une fois pile » donc $\overline{A}$ est l'évènement « ne jamais avoir pile » ou encore « avoir face aux n lancers ».*
   Les lancers étant indépendants, on a : $\mathrm{P}(\overline{A}) = q^n$ *donc* $\boxed{\mathrm{P}(A) = 1 - q^n}$.

2. *Notons B l'évènement « face n'est jamais suivi de pile » i.e. « s'il y a un face à un lancer, alors les lancers suivants donnent pile ».*
   Notons également pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, F_k l'évènement « avoir face au k-ème lancer.

   Première rédaction. *Posons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, Π_k l'évènement « le premier face apparaît au k-ième lancer, et Π_{n+1} l'évènement « il n'y a jamais de face ». Il est clair que $(\Pi_k)_{1\leq k\leq n+1}$ est une S.C.E. de Ω.*
   Pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, on a

   $$B \cap \Pi_k = \left(\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}}\right) \cap \left(F_k \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_n\right),$$

   où on rappelle que par convention, un produit vide de parties de Ω vaut Ω.
   Les lancers étant indépendants, on a $\mathrm{P}(B \cap \Pi_k) = p^{k-1}q^{n-k+1}$ et d'après la formule des probabilités totales, on a :

   $$\boxed{\mathrm{P}(B) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(B \cap \Pi_k) = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q = \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q-p} & \text{si } p \neq q. \end{cases}}$$

   Deuxième rédaction. *On note B_k l'évènement « les k premiers lancers donnent pile, et les $n-k$ derniers donnent face », on a :*

   $$B = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_k \text{ où } B_k = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_n.$$

   Les lancers étant indépendants, on a $\mathrm{P}(B_k) = p^k q^{n-k}$ et les unions étant disjointes, on obtient *encore :*

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(B_k) = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q = \frac{1}{2} \\ \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q-p} & \text{si } p \neq q. \end{cases}}$$

Exercice 30. Écart à l'indépendance. *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et deux évènements A et B tels que $\mathrm{P}(A \cap B) = \alpha$, $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \beta$, $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \gamma$ et $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \delta$.*

1. *Montrer que $\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \alpha\delta - \beta\gamma$.*
2. *Montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \xi(1-\xi)$ avec ξ à déterminer à l'aide des données de l'énoncé.*
3. *En déduire que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \dfrac{1}{4}$.*

Correction.

1. - *La famille $(A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B})$ est un système complet d'évènements. On a donc $\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1}$.*
   - *$(B, \overline{B})$ forme un système complet d'évènements donc : $\underline{\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \alpha + \gamma}$,*
   - *De même, comme $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'évènements, on a : $\underline{\mathrm{P}(B) = \alpha + \beta}$.*
   - *Ainsi,*

   $$\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \alpha - (\alpha+\gamma)(\alpha+\beta) = \alpha \underbrace{(1 - \alpha - \beta - \gamma)}_{=\delta} - \beta\gamma = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

   Remarque : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants ssi } \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 0 \text{ ssi } \alpha\delta - \beta\gamma = 0 \text{ ssi } \alpha\delta = \beta\gamma}$.

2. *D'après la question précédente $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| = |\alpha\delta - \beta\gamma|$.*
   - **Premier cas :** *si $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$, alors $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| = \alpha\delta - \beta\gamma \leq \alpha\delta \leq \alpha(1-\alpha)$ (car $\alpha + \delta \leq 1$).*
   - **Deuxième cas :** *sinon, $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, et $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| = \beta\gamma - \alpha\delta \leq \beta\gamma \leq \beta(1-\beta)$ (car $\beta + \gamma \leq 1$).*

   Dans tous les cas, $\boxed{|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \xi(1-\xi) \text{ avec } \xi \in \{\alpha, \beta\}}$.

3. *On a classiquement :* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leq \frac{1}{4}}$.
   - **Première méthode.** *On étudie les variations de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ (dérivable sur $\mathbb{R}$) qui admet un maximum global en $1/2$ valant $1/4$.*
   - **Deuxième méthode.** $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{4} - x(1-x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$

Ainsi, on déduit de la question précédente que $\boxed{|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \dfrac{1}{4}}$.

Exercice 31. Indicatrice d'Euler. *Soit un entier $n \geq 2$. On choisit au hasard un entier compris entre 1 et n. Pour k un entier naturel non nul, on note A_k l'évènement : « l'entier choisi est divisible par k ».*

1. *Calculer $\mathrm{P}(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Qu'obtient-on si k divise n ?*
2. *Notons $p_1, p_2, \dots, p_r$ les facteurs premiers distincts de n.*
   (a) *Montrer que les évènements $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.*
   (b) *On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par*
   $$\varphi(n) = \mathrm{Card}\{\ell \in [\![1, n]\!],\ \ell \wedge n = 1\}.$$
   Déduire des questions précédentes que $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Correction.

1. • *Si $k \geq n+1$ alors $A_k = \varnothing$ donc $\mathrm{P}(A_k) = 0$.*
   • *Supposons maintenant que $k \in [\![1, n]\!]$. Les entiers entre 1 et n, divisibles par k, sont $k, 2k, \dots, jk$, avec $jk \leq n < (j+1)k$. On remarque que $j = \left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$. Comme on choisit au hasard et qu'il y a j cas favorables, on obtient :* $\boxed{\mathrm{P}(A_k) = \dfrac{j}{n} = \dfrac{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor}{n}}$.
   De plus, <u>si k divise n alors</u> $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor = \dfrac{n}{k}$ *et* $\underline{\mathrm{P}(A_k) = \dfrac{1}{k}}$.

2. (a) *Soit I une partie non vide de $[\![1, r]\!]$. Alors $\bigcap_{i \in I} A_{p_i}$ est l'ensemble des entiers de $[\![1, n]\!]$ divisibles par tous les p_i, pour $i \in I$.*
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   • *Si k appartient à $\bigcap_{i \in I} A_{p_i}$, alors chaque p_i est un facteur premier de k et comme les p_i sont des nombres premiers distincts, $\prod_{i \in I} p_i$ divise k.*
   • *Réciproquement, si $\prod_{i \in I} p_i$ divise k alors a fortiori, pour tout $i \in I$, p_i divise k, donc $k \in A_{p_i}$. On en déduit $k \in \bigcap_{i \in I} A_{p_i}$.*

   On a donc $\boxed{\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_{p_i} = A_{\prod_{i \in I} p_i}}$. *D'après la première question (comme $\displaystyle\prod_{i \in I} p_i$ divise n et $\forall i \in I$, pi divise n), on en déduit*
   $$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_{p_i}\Big) = \mathrm{P}\big(A_{\prod_{i \in I} p_i}\big) = \frac{1}{\prod_{i \in I} p_i} = \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_{p_i}).$$
   $\boxed{\textit{On en déduit que les évènements } A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_r} \textit{ sont mutuellement indépendants}}$.

   (b) *Les éléments de $[\![1, n]\!]$, qui sont premiers avec n, sont ceux qui ne sont divisibles ni par p_1,..., ni par p_r, c'est-à-dire ceux qui appartiennent à $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}$, donc $\varphi(n) = \mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}\right)$.*

Les évènements $\overline{A_{p_1}}, \overline{A_{p_2}}, \dots, \overline{A_{p_r}}$ sont indépendants car les évènements $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_r}$ le sont (par théorème). On en déduit que la probabilité de choisir un entier premier avec n vaut

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\mathrm{Card}(\bigcap_{i\in I} \overline{A_{p_i}})}{n} = \mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{r} (1 - \mathrm{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$