

Écriture algébrique et trigonométrique

Exercice 1 (Écriture algébrique)



Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$A = (2 + i)(3 + i) + 4i$$

$$D = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}}$$

$$F = \frac{2}{1 - i} - \frac{5}{1 + i}$$

$$B = (1 + i)^4$$

$$E = \frac{3 - 2i}{3i - 4}$$

$$G = z\bar{z} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$$C = (1 + i)^2(5 + 2i^3) + i\sqrt{2}$$

Correction.

$$A = 5 + 9i$$

$$D = 1 - i\sqrt{3}$$

$$F = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$$

$$B = -4 \quad (i + 1)^2 = 2i$$

$$E = -\frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

$$G = |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2.$$

$$C = (10 + \sqrt{2})i + 4$$

Exercice 2 (Forme exponentielle)



Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

$$A = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$B = (-1 - i)^{15}$$

$$C = (1 + i \tan(\theta))^2 \quad (\theta \in [0, \pi/2])$$

$$D = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}.$$

Correction.

$$\bullet \quad |A| = 4 \text{ donc en factorisant } A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$C = \frac{1}{\cos^2 \theta} e^{i2\theta}$$

$$\bullet \quad -1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } 75 = 9 \times 8 + 3 \text{ donc}$$

$$B = 2^{15/2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\bullet \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ donc}$$

$$\bullet \quad |1 + i \tan \theta| = \frac{1}{|\cos \theta|} \text{ donc en factorisant}$$

$$D = 2^{10} e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 3 (Ne faites pas l'erreur classique !)

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Écrire sous forme algébrique le complexe $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.**Correction.** Remarquons que puisque $\theta \in]0, 2\pi[$, on a : $e^{i\theta} \neq 1$ donc le complexe est bien défini.

En factorisant par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur on obtient :

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} i.$$

Remarque. Si $\theta \neq \pi$ alors $\theta/2 \neq \pi/2$ et $\cos(\theta/2) \neq 0$ puis $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} i.$

Exercice 4 (Ne faites pas l'erreur classique !)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Déterminer une écriture exponentielle du complexe $z = \frac{\sin(2\alpha)}{2} + i \sin^2(\alpha)$.

Correction. On a

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sin(2\alpha)}{2} + i \sin^2(\alpha) \\ &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) + i \sin^2(\alpha) \\ z &= \sin(\alpha) e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

On ne s'arrête surtout pas là, car on ne connaît pas le signe de $\sin \alpha$ (ce n'est pas nécessairement le module de z).

Comme $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ donc $\sin \alpha \neq 0$.

- Si $\sin(\alpha) > 0$, alors $|z| = \sin(\alpha)$. Donc une écriture trigonométrique de z est

$$z = \sin(\alpha) e^{i\alpha}, \text{ si } \alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

- Sinon, *i.e.* si $\sin(\alpha) < 0$, alors $|z| = -\sin(\alpha)$ et $z = -\sin(\alpha)(-e^{i\alpha}) = -\sin(\alpha)e^{i(\alpha+\pi)}$. Donc une écriture trigonométrique de z est

$$z = -\sin(\alpha) e^{i(\alpha+\pi)}, \text{ si } \alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}](2k-1)\pi, 2k\pi[.$$

Exercice 5 (Un nombre réel)

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{U}^n$. Montrer que

$$Z := \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n} \in \mathbb{R}.$$

Correction. On note θ_k un argument de z_k de sorte que $z_k = e^{i\theta_k}$. On factorise $z_k + z_{k+1}$ sous la forme $2 \cos\left(\frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{2}\right) e^{i\frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2}}$, et on constate que les arguments des numérateur et dénominateur sont égaux. Ainsi,

$$Z = 2^n \cos\left(\frac{\theta_n - \theta_1}{2}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{2}\right) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 (Une condition nécessaire et suffisante)

Soient a et b deux complexes tels que $ab \neq -1$. On pose

$$p = \frac{a+b}{1+ab} ; q = i \frac{a-b}{1+ab} ; r = \frac{1-ab}{1+ab}.$$

1. Montrer que $r \in \mathbb{R} \iff ab \in \mathbb{R}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Par équivalences successives, on a :

$$r \in \mathbb{R} \iff r = \bar{r} \iff \dots \iff ab - \bar{a}\bar{b} = 0 \iff ab \in \mathbb{R}.$$

2. De même,

$$(p, r) \in \mathbb{R}^2 \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } p = \bar{p} \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } a+b = \bar{a}+\bar{b} \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } \operatorname{Im}(b) = -\operatorname{Im}(a).$$

Par ailleurs,

$$(q, r) \in \mathbb{R}^2 \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } q = \bar{q} \iff \dots \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } \operatorname{Re}(b) = \operatorname{Re}(a).$$

Or,

$$(\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Re}(a) \text{ et } \operatorname{Im}(b) = -\operatorname{Im}(a)) \iff b = \bar{a}.$$

Donc,

$$(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } b = \bar{a}.$$

Mais, pour $b = \bar{a}$, on a $ab = |a|^2 \in \mathbb{R}$ donc finalement,

$$(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \iff b = \bar{a}.$$

Complexes de module 1**Exercice 7 (Une simplification)**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Donner une forme simplifiée des produits $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$ et $(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$.

Correction.

- Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} (a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) &= \begin{array}{ccccccc} & a^2 & + & abj^2 & + & acj & \\ + & abj & + & b^2 & + & bcj^2 & \\ & + & acj^2 & + & bcj & + & c^2 \end{array} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ac)(j + j^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc. \end{aligned}$$

- On en déduit

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\
 &= \begin{array}{ccccccc} a^3 & + & ab^2 & + & ac^2 & - & a^2b & - & a^2c & - & abc \\ + & a^2b & + & b^3 & + & bc^2 & - & ab^2 & - & abc & - & b^2c \\ + & a^2c & + & b^2c & + & c^3 & - & abc & - & ac^2 & - & bc^2 \end{array} \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.
 \end{aligned}$$

Exercice 8 (Trois points de $\mathbb{U}$ à somme nulle)



Trouver tous les couples $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ tels que $1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$.

Correction.

- **Analyse.** Soit $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ tel que $1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$.

Méthode 1. Par unicité de l'écriture algébrique, on obtient : $\begin{cases} \cos x + \cos y = -1 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$.

La deuxième équation assure que $\sin x = -\sin y = \sin(-y)$ donc $x \equiv \pi + y [2\pi]$ ou $x \equiv -y [2\pi]$.

Si $x \equiv \pi + y [2\pi]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pi + y + 2\pi k$ donc $\cos x + \cos y = \cos(\pi + y) + \cos y = -\cos y + \cos y = 0 \neq -1$: contradiction.

Donc

$$x = -y [2\pi].$$

D'où $\cos x = \cos y$ et d'après la première équation $2 \cos x = -1$ donc

$$x \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

Comme $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$, il vient que $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ou $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Méthode 2. En passant aux modules au carré

- Soit $(x, y) \in [-\pi, \pi]$ solution. Alors $-e^{iy} = 1 + e^{ix}$ donc, en prenant les modules au carré, on a $1 = |1 + e^{ix}|^2 = (1 + \cos x)^2 + \sin^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x$ d'où $\cos x = -1/2$. Comme $x \in [-\pi, \pi]$, on a $x = \pm \frac{2\pi}{3}$. Par symétrie, on a aussi $y = \pm \frac{2\pi}{3}$, d'où seulement 4 couples candidats.

- Un calcul montre que les couples $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$ sont exclus.

Méthode 3. En factorisant par l'angle moitié, on trouve $1 + 2 \cos \frac{x-y}{2} e^{i \frac{x+y}{2}} = 0$ donc

$$\cos \frac{x-y}{2} e^{i \frac{x+y}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

En prenant le module, on obtient $\left| \cos \frac{x-y}{2} \right| = \frac{1}{2}$ donc $\cos \frac{x-y}{2} = \pm \frac{1}{2}$.

– **Cas où** $\cos \frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2}$. Alors $e^{i \frac{x+y}{2}} = 1$. On en déduit que

$$\frac{x-y}{2} \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{x+y}{2} \equiv 0 [2\pi]$$

d'où

$$x - y \equiv \pm \frac{4\pi}{3} [4\pi] \quad \text{et} \quad x + y \equiv 0 [4\pi].$$

En faisant la somme et la différence, on obtient :

$$2x \equiv \pm \frac{4\pi}{3} [4\pi] \quad \text{et} \quad 2y \equiv \mp \frac{4\pi}{3} [4\pi]$$

d'où

$$x \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi] \quad \text{et} \quad y \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

– **Cas où** $\cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$. Alors $e^{i\frac{x+y}{2}} = -1$. On en déduit que

$$\frac{x-y}{2} \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{x+y}{2} \equiv \pi [2\pi]$$

d'où

$$x - y \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [4\pi] \quad \text{et} \quad x + y \equiv 2\pi [4\pi].$$

En faisant la somme et la différence, on obtient :

$$2x \equiv \pm \frac{4\pi}{3} [4\pi] \quad \text{et} \quad 2y \equiv \mp \frac{4\pi}{3} [4\pi]$$

d'où

$$x \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi] \quad \text{et} \quad y \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

Dans tous les cas, $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ donc $x, y \in \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Remarquons que si $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ ou $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right)$ alors $x - y = 0$, ce qui contredit $x - y \equiv \pm \frac{4\pi}{3} [4\pi]$. Donc $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ ou $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right)$.

- **Synthèse.** Réciproquement, si $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ ou $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right)$, alors

$$1 + e^{ix} + e^{iy} = 1 + j + \bar{j} = 1 + j + j^2 = 0.$$

- **Conclusion.** $S = \left\{ \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right) \right\}$.

Exercice 9 (Trois points de $\mathbb{U}$ à somme nulle)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \implies e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.

Correction. Supposons que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

Quitte à multiplier par e^{-ix} , on peut supposer $x = 0$.

Dès lors, $e^{iy} + e^{iz} = -1$. D'après l'exercice 8, on sait alors que $y + z \equiv 0 [2\pi]$ puis $y \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

- Si $y \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ alors $e^{iy} = j$ et $e^{iz} = e^{-iy} = \bar{j} = j^2$.
Dans ce cas, $e^{i2x} = e^0 = 1$, $e^{i2y} = j^2$, et $e^{i2z} = j^4 = j$ donc $e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.
- Si $y \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ alors $e^{iy} = \bar{j} = j^2$ et $e^{iz} = e^{-iy} = j$.
Dans ce cas, $e^{i2x} = e^0 = 1$, $e^{i2y} = j$, et $e^{i2z} = j^2$ donc $e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.

Dans tous les cas, on a montré la conclusion, ce qui prouve l'implication.

Exercice 10 (Un réel strictement positif)



Soient $a, b, z \in \mathbb{U}$, deux à deux distincts. Montrer que $\frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve 1. $a, b, z \in \mathbb{U}$ donc il existe $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $z = e^{i\theta}$.
En factorisant par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 &= \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - e^{i\beta}} \right)^2 \\ &= \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}} \left(\frac{e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}} 2i \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta+\beta}{2}} 2i \sin\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)} \right)^2 \\ &= \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}} \frac{e^{i(\theta+\alpha)} \sin^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{e^{i(\theta+\beta)} \sin^2\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)} \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque z et a sont distincts, $z-a \neq 0$, et $b \neq 0$ (car de module 1), d'où $\frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{\frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+^*}$.

Preuve 2. Rappelons que si $u \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{u} = \bar{u}$ donc $u = \frac{1}{\bar{u}}$. On a :

$$(z-a)^2 = (z-a) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}} \right) = (z-a) \frac{\bar{a} - \bar{z}}{\bar{a}\bar{z}} = -a \frac{|z-a|^2}{\bar{z}},$$

donc

$$\frac{1}{a} (z-a)^2 = -\frac{|z-a|^2}{\bar{z}}.$$

De même,

$$\frac{1}{b} (z-b)^2 = -\frac{|z-b|^2}{\bar{z}}.$$

Puis, comme a, b et z sont distincts, on a

$$\boxed{\frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 = \frac{|z-a|^2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}_+^*}.$$

Preuve 2 bis. Notons $Z = \frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2$. Montrons que $Z = |Z|$, ce qui assurera que $Z \in \mathbb{R}_+$.

On a :

$$\begin{aligned}
 |Z| &= \frac{|b|}{|a|} \left| \frac{z-a}{z-b} \right|^2 && (|a| = |b| = 1 \text{ car } a, b \in \mathbb{U}) \\
 &= \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(z-b)(\bar{z}-\bar{b})} \\
 &= \frac{(z-a) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}} \right)}{(z-b) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{b}} \right)} && (\text{car } \forall w \in \mathbb{U}, \bar{w} = \frac{1}{w}) \\
 &= \frac{(z-a) \frac{a-z}{az}}{(z-b) \frac{b-z}{bz}} \\
 &= \frac{-(z-a)^2}{-(z-b)^2} \times \frac{b}{a} \\
 &= Z,
 \end{aligned}$$

d'où $Z \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a $Z \neq 0$ donc $Z \in \mathbb{R}_+^*$.

ATTENTION : pour $w \in \mathbb{C}$, on n'a généralement pas $w^2 = |w|^2$ (contrairement au cas où $w \in \mathbb{R}$). Par exemple, pour $w = i$, on a $w^2 = -1$, alors que $|w|^2 = 1$.

Exercice 11 (Une CNS d'inclusion des $\mathbb{U}_n$)

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Montrer que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$ si et seulement si n divise m .

Correction.

- Supposons $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$. Alors, en particulier $e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{U}_m$, donc $\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^m = e^{\frac{2mi\pi}{n}} = 1$. On en déduit que $\frac{2m\pi}{n}$ est un multiple de 2π donc n divise m .
- Supposons que n divise m . Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = np$.
Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On a $z^n = 1$. On en déduit $z^m = (z^n)^p = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_m$.
On a donc $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$.

Exercice 12 (Une équation)

On veut résoudre l'équation $z^5 = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Méthode 1 (analyse-synthèse).

Analyse. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = \bar{z}$. En passant au module, il vient $|z|^5 = |z|$ donc $|z|(|z|^4 - 1) = 0$ donc $|z| = 0$ ou $|z|^4 = 1$ d'où $z = 0$ ou $|z| = 1$.

Supposons désormais $z \neq 0$. Alors $z \in \mathbb{U}$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ($\textcircled{!}$), si bien que l'équation devient $z^5 = \frac{1}{z}$ donc $z^6 = 1$.

Ainsi, $z = 0$ ou $z \in \mathbb{U}_6$.

Synthèse. Il est clair que 0 est solution.

Considérons maintenant $z \in \mathbb{U}_6$. Alors $z^6 = 1$, donc $z \neq 0$ et $z^5 = \frac{1}{z}$.

En particulier $z \in \mathbb{U}$ donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$ d'où $z^5 = \bar{z}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = \bar{z}$ est $\{0\} \cup \mathbb{U}_6$, donc l'équation admet 7 solutions.

Méthode 2 (équivalences). 0 est bien sûr solution. Déterminons les solutions non nulles de cette équation.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$. On a :

$$\begin{aligned} z^5 = \bar{z} &\iff |z|^5 e^{i5\theta} = |z| e^{-i\theta} \\ &\iff \begin{cases} |z|^5 = |z| \\ 5\theta \equiv -\theta \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z|^4 = 1 & \text{car } z \neq 0 \\ 6\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{3}} \end{cases} \\ &\iff z \in \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + j, e^{i\frac{2\pi}{3}} = j, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}, e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 + \bar{j} \right\}. \end{aligned}$$

Conclusion : $S = \left\{ 0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + j, e^{i\frac{2\pi}{3}} = j, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}, e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 + \bar{j} \right\}$.

Remarque.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} = \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 1\} = \{1, -1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^4 = 1\} = \{1\}.$$

Exercice 13 ($\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est un algébrique de degré 3) 🔗💡

En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 à coefficients entiers dont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution.

Correction. Posons $\zeta_7 = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

On a

$$\mathbb{U}_7 = \left\{ 1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \zeta_7^4, \zeta_7^5, \zeta_7^6 \right\} = \left\{ 1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \overline{\zeta_7^3}, \overline{\zeta_7^2}, \overline{\zeta_7} \right\}.$$

Classiquement, la somme des éléments de $\mathbb{U}_7$ vaut 0, donc

$$0 = 1 + (\zeta_7 + \overline{\zeta_7}) + (\zeta_7^2 + \overline{\zeta_7^2}) + (\zeta_7^3 + \overline{\zeta_7^3}) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right). \quad (*)$$

La formule de doublement de l'angle donne $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. On a aussi :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(\theta + 2\theta) \\ &= \cos\theta \cos(2\theta) - \sin(\theta) \sin(2\theta) \\ &= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin^2\theta \cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) \cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

ou bien, on utilise $\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(e^{3i\theta})$ puis la formule du binôme de Newton.

En posant $x = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, on obtient $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 2x^2 - 1$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 4x^3 - 3x$.

En reportant dans (*), il vient $1 + 2x + 2(2x^2 - 1) + 2(4x^3 - 3x) = 0$, *i.e.*

$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \text{ est solution de l'équation de degré 3 : } 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$

Inégalités

Exercice 14 (Inégalité exponentielle)

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leq e^{|z|}$ et déterminer les cas d'égalité.



Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}|e^z| &= e^{\operatorname{Re} z} \\ &\leq e^{|z|}\end{aligned}\quad \text{par l'inégalité } \operatorname{Re} z \leq |z| \text{ et la croissance de l'exponentielle.}$$

Par croissance stricte de l'exponentielle, il y a égalité ssi $|z| = \operatorname{Re} z$, c'est-à-dire ssi $z \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 15 (Comparaison des normes)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer $\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.



Correction. • L'inégalité de droite provient du fait que :

$$|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 \leq |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 + 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z| = (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2.$$

On conclut en utilisant la croissance de la fonction racine carrée.

• Pour l'inégalité de gauche, écrivons $z = x + iy$ sous forme algébrique. On a alors

$$|z|^2 - \left(\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 + y^2 - \frac{(|x| + |y|)^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 - 2|x||y|}{2} = \frac{(|x| - |y|)^2}{2} \geq 0.$$

Exercice 16 (Inégalité triangulaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'implication $|z^2 - 1| \leq 8 \implies |z - 2| \leq 5$.

Correction.

- **Preuve directe.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z^2 - 1| \leq 8$. On a $|z^2 - 1| = |z - 1||z + 1|$.

Méthode 1 (distinguons deux cas).

- Si $|z - 1| \leq 4$, alors d'après l'inégalité triangulaire, $|z - 2| = |z - 1 - 1| \leq |z - 1| + 1 \leq 5$.
- Si $|z - 1| > 4$, alors $|z + 1| \leq \frac{8}{4} = 2$, et par inégalité triangulaire $|z - 2| = |z + 1 - 3| \leq |z + 1| + 3 \leq 5$.

Méthode 2 (par inégalité triangulaire renversée), on a $|z^2| - |1| \leq |z^2 - 1|$ donc $|z|^2 \leq 9$ d'où $0 \leq |z| \leq 3$.

Ainsi, par inégalité triangulaire, on obtient $|z - 2| \leq |z| + 2 \leq 3 + 2 = 5$.

- **Preuve par contraposée.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 2| > 5$. Montrons que $|z^2 - 1| > 8$.

On a : $|z^2 - 1| = |z - 1||z + 1|$.

D'une part, $|z - 1| = |(z - 2) + 1| \underset{ITR}{\geq} ||z - 2| - 1| = |z - 2| - 1 > 4$, car $|z - 2| > 5$.

D'autre part, $|z + 1| = |(z - 2) + 3| \underset{ITR}{\geq} ||z - 2| - 3| = |z - 2| - 3 > 2$, car $|z - 2| > 5$.

En multipliant deux inégalités de réels positifs, on obtient : $|z^2 - 1| > 8$.

Exercice 17 (Inégalité triangulaire à n pattes)

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer $\left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$.

Correction. Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire à la somme $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ et d'utiliser la formule $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ pour $q \neq 1$.

Exercice 18 (Inégalité triangulaire généralisée et cas d'égalité)

L'objectif de cet exercice est de démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad |z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \iff z_1, \dots, z_n \text{ ont le même argument principal.}$$

Pour $n = 2$, on retrouve le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans le cas où z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

1. Montrer l'implication indirecte.
2. Montrons maintenant l'implication directe.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, |z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$.

(b) Vérifier que, pour tous z_1 et z_2 non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \implies z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument principal.}$$

(c) En déduire, par récurrence sur $n \geq 2$, que :

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad |z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \implies z_1, \dots, z_n \text{ ont le même argument principal.}$$

Correction.

1. Soient $(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = |z_k|e^{i\theta}$. Alors

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| e^{i\theta} \left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right) \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \text{ car } |e^{i\theta}| = 1.$$

On a donc montré l'implication indirecte.

2. (a) Inégalité triangulaire généralisée, montrée en cours, par récurrence sur $n \geq 2$.

(b) Soient z_1 et z_2 non nuls tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Notons θ_1 l'argument principal de z_1 . D'après le cours, le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour $n = 2$ précise qu'alors $z_1 = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Or, $z_1 \neq 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Ainsi, $|z_2| = \lambda |z_1|$ et

$$z_2 = \lambda z_1 = \underbrace{\lambda |z_1|}_{=|z_2|} e^{i\theta_1}.$$

Donc θ_1 est un argument de z_2 , appartenant à $] -\pi, \pi]$ donc est l'argument principal de z_2 .

On a donc montré que z_1 et z_2 ont même argument principal.

(c) Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$P(n) : \ll \forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \implies \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument principal} \gg.$$

Montrons pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ par récurrence simple.

L'initialisation a été montrée dans la question 2b. Montrons l'hérédité.

Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$. Soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ tel que $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| \stackrel{ITG(2a)}{\leq} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \stackrel{ITG(2a)}{\leq} \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Les deux termes extrêmes étant les mêmes, on en déduit que toutes les inégalités précédentes sont en fait des égalités ! En particulier :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| \stackrel{(*)}{=} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \stackrel{(**)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

- En notant $Z = \sum_{k=1}^n z_k$, l'égalité (*) est $|Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}|$, donc d'après la question 2b, on sait que Z et z_{n+1} ont le même argument principal.

- L'égalité (**) assure $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$, et donc par hypothèse de récurrence, on a $z_1, \dots, z_n$ ont même argument principal, que l'on notera $\theta \in]-\pi, \pi]$.

On conclut si on montre que θ est l'argument principal de Z :

Or,

$$Z = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n |z_k| e^{i\theta} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right)}_{=|Z|} e^{i\theta},$$

donc θ est un argument de Z appartenant à $]-\pi, \pi]$ donc θ est l'argument principal de Z . Ainsi,

$z_1, \dots, z_{n+1}$ ont tous le même argument principal, d'où $P(n+1)$.

Par théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Trigonométrie

Exercice 19 (Linéarisation)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes :

$$A = \sin^4(x)$$

$$B = \cos^4(x)$$

$$C = \sin^2(x) \cos^3(x).$$

Correction.

$$A = \frac{1}{8} (\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3) \quad B = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3) \quad C = \frac{1}{16} (2 \cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x)).$$

Pour les deux premières, on utilise les formules d'Euler $\left(\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$ et du binôme de Newton.

Pour la troisième, les formules d'Euler donnent : $C = -\frac{1}{32} (e^{ix} - e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^3$. Newton puis développement donnent : $C = -\frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 2(e^{ix} + e^{-ix}))$, ce qui permet de conclure.

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 20 (Antécédents par l'exponentielle complexe)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $e^z = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Correction. Notons $a \neq 0$ donc $a = |a|e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^{\operatorname{Re}(z)} = |a| \text{ et } e^{i\operatorname{Im}(z)} = e^{i\alpha} \\ &\iff \operatorname{Re}(z) = \ln |a| \text{ et } \operatorname{Im}(z) \equiv \alpha [2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \ln |a| + i\alpha + i2k\pi. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{\ln |a| + i\alpha + i2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 21 (Racine 4^{ème})

Déterminer les racines 4^{ème} de 81 et de $16i$.

**Correction.**

- $\sqrt[4]{81} = 3$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} z^4 = 81 &\iff \left(\frac{z}{3}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z}{3} \in \{1; i; -i; -1\} \\ &\iff z \in \{3; 3i; -3i; -3\}. \end{aligned}$$

Ainsi, les racines 4^{ème} de 81 sont $\{3; 3i; -3i; -3\}$.

- $16i = 16e^{i\frac{\pi}{2}}$. D'après le cours, les racines 4^{ème} de $16i$ sont les $\sqrt[4]{16}e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{i2k\pi}{4})}$ avec $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Ainsi, l'ensemble des racines 4^{ème} de $16i$ est $\left\{2e^{i\frac{\pi}{8}}; 2e^{i\frac{5\pi}{8}}; 2e^{-i\frac{7\pi}{8}}; 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right\}$.

Exercice 22 (Résolution d'équations sans surprise)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.



1. $e^z = i$

2. $z^2 = 2 - 2i$

3. $z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

4. $z^2 + (3+2i)z + 5+i = 0$.

Correction.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$e^z = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff e^{z-i\frac{\pi}{2}} = 1 \iff z - i\frac{\pi}{2} \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid z = i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. On écrit $2 - 2i = 2^{3/2}e^{-i\pi/4} \in \mathbb{C}^*$ donc $2 - 2i$ a deux racines carrées distinctes et opposées

$$S = \{\pm 2^{3/4}e^{-i\pi/8}\}$$

3. Écrivons $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/3}} = e^{i2\pi/3}$ (on reconnaît j). Il s'agit de déterminer les racines sixièmes de j . D'après le cours,

$$S = \left\{e^{i\left(\frac{2\pi}{3 \times 6} + \frac{2k\pi}{6}\right)} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{i\frac{(3k+1)\pi}{9}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{i\pi/9}, e^{i4\pi/9}, e^{i7\pi/9}, e^{-i8\pi/9}, e^{-5i\pi/9}, e^{-2i\pi/9}\right\}.$$

4. $\Delta = -15 + 8i = (1 + 4i)^2$ donc $\delta = 1 + 4i$. Puis $S = \{z_1 = -2 - 3i; z_2 = -1 + i\}$.

Exercice 23 (Résolution d'équations a priori HP)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0.$

Indication : on commencera par chercher une racine imaginaire pure.

Correction. Notons (E) cette équation. Commençons par chercher une solution imaginaire pure : on pose donc $z_0 = i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} z_0^3 - (1 + 2i)z_0^2 + 3(1 + i)z_0 - 10(1 + i) &= -\alpha^3 i + \alpha^2(1 + 2i) + 3(1 + i)i\alpha - 10(1 + i) \\ &= \alpha^2 - 3\alpha - 10 + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10). \end{aligned}$$

Donc

$$z_0 \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } (\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0 \text{ et } -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0).$$

$$\text{Or, } \alpha^2 - 3\alpha - 10 = (\alpha + 2)(\alpha - 5). \text{ Donc}$$

$$z_0 \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } (\alpha \in \{-2, 5\} \text{ et } -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0).$$

$$\text{Or, } -(-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) - 10 = 0 \text{ et } -(5)^3 + 2(5)^2 + 3 \times 5 - 10 = -70.$$

Finalement, z_0 est solution de (E) ssi $\alpha = -2$, donc la seule la solution imaginaire pure de (E) est $z_0 = -2i$.

On en déduit donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + az + b).$$

Après calculs, on trouve $a = -1 - 4i$ et $b = -5 + 5i$, donc

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + (-1 - 4i)z + (-5 + 5i)).$$

Il nous reste donc à résoudre l'équation

$$z^2 + (-1 - 4i)z + (-5 + 5i) = 0.$$

C'est une équation de degré 2 à coefficients complexes. Son discriminant Δ vaut

$$\Delta = (-1 - 4i)^2 - 4(-5 + 5i) = -15 + 8i + 20 - 20i = 5 - 12i.$$

On cherche maintenant $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = 5 - 12i$.

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ xy = -6 \\ y^2 = 4 \end{cases} \quad (L_1 + L_3)$$

On en déduit finalement que les deux racines de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$. Les solutions de $z^2 + (-1 - 4i)z + (-5 + 5i) = 0$ sont donc

$$z_1 = \frac{1 + 4i - (3 - 2i)}{2} = -1 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + 4i + (3 - 2i)}{2} = 2 + i.$$

Enfin, les solutions de l'équation de départ sont $-2i, -1 + 3i$ et $2 + i$.

2. $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

Correction. Posons $Z = z^2$.

$$z^4 - 3iz^2 + 4 = 0 \iff Z^2 - 3iZ + 4 = 0.$$

On obtient une équation de degré 2 à coefficients complexes $Z^2 - 3iZ + 4 = 0$, de discriminant $\Delta = -25 = (5i)^2$ dont une racine carrée est $\delta = 5i$.

Les solutions de cette équation sont donc $Z_1 = -i$ et $Z_2 = 4i$ (Vérif OK avec les relations coef-racines).

Ensuite, on résout $z^2 = -i = e^{i3\pi/2}$, qui donne $z = \pm e^{i3\pi/4}$.

La seconde équation donne : $z^2 = 4i = 4e^{i\pi/2}$ donne $z = \pm 2e^{i\pi/4}$.

Finalement, $S = \{\pm e^{i3\pi/4}; \pm 2e^{i\pi/4}\}$.

3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Correction. On a

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \iff (-z)^4 + (-z)^3 + (-z)^2 + (-z) + 1 = 0$$

$$\iff \frac{1 - (-z)^5}{1 + z} = 0 \quad \text{car } z \neq -1$$

$$\iff (-z)^5 = 1 \text{ et } z \neq -1$$

$$\iff -z \in \mathbb{U}_5 = \{1; e^{2i\pi/5}; e^{4i\pi/5}; e^{-4i\pi/5}; e^{-2i\pi/5}\} \text{ et } -z \neq 1$$

$$\iff z \in \{-e^{2i\pi/5}; -e^{4i\pi/5}; -e^{-4i\pi/5}; -e^{-2i\pi/5}\}.$$

Donc $S = \{-e^{2i\pi/5}; -e^{4i\pi/5}; -e^{-4i\pi/5}; -e^{-2i\pi/5}\} = \{e^{-i\frac{3\pi}{5}}; e^{-i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{3\pi}{5}}\}.$

4. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

Correction. On pourrait développer mais on ne sait pas résoudre une équation de degré 4. L'idée est de mettre l'expression sous la $a^2 - b^2$ pour le factoriser.

$$\begin{aligned} (3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 &= (3z^2 + z + 1)^2 - (iz^2 + 2iz + 2i)^2 \\ &= (3z^2 + z + 1 + iz^2 + 2iz + 2i)(3z^2 + z + 1 - iz^2 - 2iz - 2i) \end{aligned}$$

$$(E) \iff (3 + i)z^2 + (1 + 2i)z + (1 + 2i) = 0 \text{ ou } (3 - i)z^2 + (1 - 2i)z + (1 - 2i) = 0$$

$$\iff (3 + i)z^2 + (1 + 2i)z + (1 + 2i) = 0 \text{ ou } (3 + i)\bar{z}^2 + (1 + 2i)\bar{z} + (1 + 2i) = 0 \quad \text{en conjuguant le 2e}$$

$$\iff P(z) = 0 \text{ ou } P(\bar{z}) = 0 \text{ avec } P(z) = (3 + i)z^2 + (1 + 2i)z + (1 + 2i) = 0.$$

$P(z) = 0$ est une équation du second degré, de discriminant $\Delta_P = -7 - 24i$. On peut chercher une racine carrée δ de Δ sous la forme $\delta = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\Delta_P = \delta^2 = (a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$. Par unicité de l'écriture algébrique, $ab = -12$ et $a^2 - b^2 = -7$. $a = 3$ et $b = 4$ conviennent. Ainsi, $\Delta_P = \delta^2$ avec $\delta = 3 - 4i$. Puis, les racines de P sont $z_1 = \frac{-2 + i}{3 + i} = \frac{-1 + i}{2}$ et

$$z_2 = \frac{1-3i}{3+i} = -i.$$

Ainsi, les solutions de l'équation de départ sont $S = \left\{ i, -i, \frac{-1+i}{2}, \frac{-1-i}{2} \right\}.$

Exercice 24 (Une équation de degré 2 à paramètre)



Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Résoudre l'équation $z^2 - 2 \cos \theta z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Correction. On remarque que $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $1 = e^{i\theta} e^{-i\theta}$, donc d'après les relations coefficients-racines, on sait que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont les solutions de cette équation.

Étudions le cas d'égalité. On a $e^{i\theta} = e^{-i\theta} \iff \theta \equiv -\theta [2\pi] \iff \theta \equiv 0 [\pi]$.

De plus, si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, alors $e^{i\theta} = 1$ et si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, alors $e^{i\theta} = -1$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\begin{cases} \{1\} & \text{si } \theta \equiv 0 [2\pi] \\ \{-1\} & \text{si } \theta \equiv \pi [2\pi] \\ \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\} & \text{si } \theta \not\equiv 0 [\pi] \end{cases}.$$

Exercice 25 (Une équation exponentielle)



Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{4z} = e^{2z} - 1$.

Correction. Résolvons $Z^2 - Z + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré à coefficient réels, ayant pour discriminant $-3 < 0$. Elle a donc 2 solutions complexes conjuguées

$$Z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}.$$

On a aussi, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{2z} = e^{-i\pi/3} \iff 2z \in -i\frac{\pi}{3} + i2\pi\mathbb{Z} \iff z \in -i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z}$$

et

$$e^{2z} = e^{i\pi/3} \iff 2z \in i\frac{\pi}{3} + i2\pi\mathbb{Z} \iff z \in i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z}.$$

Ainsi,

$$e^{4z} = e^{2z} - 1 \iff Z^2 - Z + 1 = 0 \iff (e^{2z} = e^{-i\pi/3} \text{ ou } e^{2z} = e^{i\pi/3}) \iff \left(z \in -i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z} \text{ ou } z \in i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z} \right).$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{ -i\frac{\pi}{6} + ik\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ i\frac{\pi}{6} + i\ell\pi \mid \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$

Exercice 26 (Un type classique d'équation)

Soient $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{(1-iz)^n}{(1+iz)^n} = \frac{1-i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha}$.

Combien y a-t-il de solutions ?

Résoudre par équivalences, en les pictogrammes !

Correction. Remarquons que $\frac{1-i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{-2i\alpha}$ et que l'ensemble de définition de l'équation est $\{z \in \mathbb{C} \mid 1+iz \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{(1-iz)^n}{(1+iz)^n} = \frac{1-i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha} &\Leftrightarrow \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = e^{-2i\alpha} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1-iz}{1+iz} = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{-2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1-iz}{1+iz} = e^{i\theta_k} \text{ avec } \theta_k = \frac{-2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 1-iz = e^{i\theta_k} + ie^{i\theta_k}z \text{ car } 2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 1 - e^{i\theta_k} = iz(1 + e^{i\theta_k}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, iz = \frac{1 - e^{i\theta_k}}{1 + e^{i\theta_k}} \text{ car } 0 \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, iz = \frac{e^{\frac{i\theta_k}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta_k}{2}} - e^{\frac{i\theta_k}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta_k}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta_k}{2}} + e^{\frac{i\theta_k}{2}} \right)} = \frac{-2i \sin \frac{\theta_k}{2}}{2 \cos \frac{\theta_k}{2}} = -i \tan \frac{\theta_k}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = -\tan \left(\frac{-\alpha + k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \tan \left(\frac{\alpha - k\pi}{n} \right) \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$

N.B. : cet ensemble contient exactement n termes car ils sont tous distincts. En effet, on peut remarquer que $\frac{\alpha - k\pi}{n}$ décrit n valeurs distinctes dans un intervalle de longueur strictement inférieure à π , donc par π -périodicité et stricte croissance de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les images de ces valeurs par l'application tangente sont toutes distinctes.

Sinon, on a les équivalences classiques pour $(k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$:

$$\tan \left(\frac{\alpha - k\pi}{n} \right) = \tan \left(\frac{\alpha - \ell\pi}{n} \right) \iff \frac{\alpha - k\pi}{n} \equiv \frac{\alpha - \ell\pi}{n} [\pi] \iff \frac{(k - \ell)\pi}{n} \in \pi\mathbb{Z} \iff k - \ell \in n\mathbb{Z} \iff k - \ell = 0,$$

car $-n < -(n-1) \leq k - \ell \leq n-1 < n$, et le seul multiple de n dans $] -n, n[$ est 0.

Exercice 27 (Équation $z^n = w^m$)

Trouver $n, m \in \mathbb{N}^*$ minimaux tels que $(1 + i\sqrt{3})^m = (1 - i)^n$.



Correction. Tout d'abord, on a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Si (n, m) est solution de l'équation, la considération des modules donne $2^m = \sqrt{2}^n$, donc $n = 2m$.

Ensuite, si $n = 2m$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
 (1 + i\sqrt{3})^m &= (1 - i)^n \iff 2^m e^{im\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}^{2m} e^{-im\frac{\pi}{2}} \\
 &\iff e^{im\frac{\pi}{3}} = e^{-im\frac{\pi}{2}} \\
 &\iff m\frac{\pi}{3} \equiv -m\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
 &\iff \frac{5\pi m}{6} \in 2\pi\mathbb{Z} \\
 &\iff 5m \in 12\mathbb{Z} \\
 &\iff 12|5m \\
 &\iff 12|m \qquad \qquad \qquad \text{car } 12 \wedge 5 = 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution minimale est $m = 12$ et $n = 2m = 24$.

Exercice 28 (Polynôme minimal)

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Trouver $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 + pz + q = 0$.



Correction. On doit montrer seulement l'existence. On va donc faire analyse-synthèse, avec analyse au brouillon.

Analyse au brouillon. (💡) Les relations coefficients-racines doivent guider notre recherche : on cherche un polynôme **réel** de degré 2 dont z soit solution. On sait que dans ce cas, $\bar{z}$ sera également solution. Comme z n'est pas réel, ces deux nombres sont différents, donc il s'agira des deux solutions de l'équation $z^2 + pz + q = 0$.

Les relations coefficients-racines impliquent que $p = -(z + \bar{z}) = -2\operatorname{Re}z$ et $q = z\bar{z} = |z|^2$.

Synthèse sur la copie. Posons $p = -(z + \bar{z}) = -2\operatorname{Re}z$ et $q = z\bar{z} = |z|^2$, et montrons que ce couple (p, q) convient. On a :

$$\begin{aligned}
 z^2 - (2\operatorname{Re}z)z + |z|^2 &= z^2 - (z + \bar{z})z + z\bar{z} \\
 &= z^2 - z^2 - z\bar{z} + z\bar{z} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

donc ce couple convient.

Exercice 29 (Une égalité d'ensembles)

Montrer l'égalité $\left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

Correction. Notons $J = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}$ et montrons $J = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$ par double inclusion.

Sens direct. Soit $z \in J$. Montrer que $z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

Méthode 1. Alors $z \in \mathbb{C}^*$ et il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. Par hypothèse, $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ donc $\operatorname{Im} \left(\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \right) = 0$ d'où $\rho \sin \theta - \frac{1}{\rho} \sin \theta = 0$ donc $\sin \theta \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) = 0$ donc $\sin \theta = 0$ ou $\rho = \frac{1}{\rho}$ donc $\operatorname{Im}(z) = 0$ ou $\rho^2 = 1$ donc $z \in \mathbb{R}$ ou $\rho = 1$ (car $\rho > 0$), et comme $z \neq 0$, on a donc $z \in \mathbb{R}^*$ ou $z \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire $z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

Méthode 2. On note $r = z + \frac{1}{z}$, de telle sorte que $r \in \mathbb{R}$.

En multipliant par z , on obtient $z^2 + 1 = rz$, c'est-à-dire que z est solution de l'équation du second degré à coefficients réels (d'inconnue x)

$$x^2 - rx + 1 = 0. \quad (\spadesuit)$$

Le discriminant de $(\spadesuit)$ est $\Delta = r^2 - 4$. On distingue alors deux cas.

- Si $\Delta \geq 0$, $(\spadesuit)$ a deux solutions réelles (ou une solution réelle double). Le produit de ces deux solutions (ou le carré de la solution double) valant 1, lesdites solutions sont non nulles. Puisque z est l'une d'entre elles, on a $z \in \mathbb{R}^*$.
- Si $\Delta < 0$, $(\spadesuit)$ a deux solutions complexes non réelles, et on sait qu'elles sont conjuguées. Notons α l'une des deux (de telle sorte que l'autre est $\bar{\alpha}$). Le produit des deux solutions vaut alors $1 = \alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$. Cela prouve que $\alpha \in \mathbb{U}$. Que l'on ait $z = \alpha$ ou $z = \bar{\alpha}$, on en déduit dans tous les cas $z \in \mathbb{U}$.

Cela montre l'inclusion $J \subset \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

Sens réciproque. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$. On distingue alors deux cas.

- Si $z \in \mathbb{U}$, on a évidemment $z \in \mathbb{C}^*$ et d'autre part $\frac{1}{z} = \bar{z}$, donc

$$z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}.$$

- Si $z \in \mathbb{R}^*$, on a (encore plus évidemment) $z \in \mathbb{R}^*$ et $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, on a donc montré $z \in J$, ce qui montre l'inclusion réciproque $\mathbb{U} \cup \mathbb{R}^* \subset J$, et clôt la démonstration.

Alternative (preuve directe). Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} z \in J &\iff z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \\ &\iff z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}} \\ &\iff z - \bar{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = 0 \\ &\iff (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \quad (\text{💡}) \\ &\iff z = \bar{z} \text{ ou } |z|^2 = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U} && \text{car } |z| \geq 0. \\ &\iff z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U} && \text{car } z \neq 0. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité d'ensembles $J = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$ (puisque ces deux ensembles ont les mêmes éléments).

Exercice 30 (Racines de même module)

Soit $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On suppose que les deux racines de $X^2 - pX + q^2$ ont le même module.

Exprimer le quotient $\frac{p^2}{q^2}$ en fonction des deux racines, et en déduire que $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$.

Correction. Notons z_1 et z_2 les deux racines de $X^2 - pX + q^2$ (ou, éventuellement, la racine double comptée deux fois). D'après les relations coefficients-racines, on a

$$p = z_1 + z_2 \quad \text{et} \quad q^2 = z_1 z_2.$$

En particulier, l'hypothèse $q \neq 0$ entraîne $z_1, z_2 \neq 0$.

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} \\ &= \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 z_2} \\ &= \frac{z_1}{z_2} + 2 + \frac{z_2}{z_1} \\ &= u + \frac{1}{u} + 2, \end{aligned}$$

où l'on a noté $u = \frac{z_1}{z_2}$.

Comme $|z_1| = |z_2|$, on a $u \in \mathbb{U}$. On en déduit que $\frac{1}{u} = \bar{u}$ et on obtient la nouvelle expression

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= u + \bar{u} + 2 \\ &= 2\operatorname{Re}(u) + 2. \end{aligned}$$

Cela montre que $\boxed{\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{R}}$.

Comme $u \in \mathbb{U}$, on a même $|\operatorname{Re}(u)| \leq |u| = 1$, donc $\operatorname{Re}(u) \in [-1, 1]$ puis $\frac{p^2}{q^2} \in [0, 4]$ donc $\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{R}_+$.

Lemme. Si un complexe w vérifie $w^2 \in \mathbb{R}_+$, alors w est réel. (💡)

Écrivons $w = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 Alors $w^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$.
 Or, $w^2 \in \mathbb{R}$ donc $ab = 0$.
 Si $a = 0$, alors $w^2 = -b^2 \leq 0$, ce qui n'est compatible avec $w^2 \geq 0$ que si $b = 0$.
 Dans tous les cas $b = 0$, donc $w \in \mathbb{R}$, ce qui prouve le lemme.

On déduit du lemme que $\boxed{\frac{p}{q} \text{ est un nombre réel}}$, et même que $\frac{p}{q} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{q^2}} \in [-2, 2]$.

Remarque. Le point subtil de l'exercice est bien celui-ci : « $(p/q)^2$ réel » ne suffit pas à affirmer p/q réel (par exemple $i^2 = -1$).

Nombres complexes et géométrie

Exercice 31 (Localisation de solutions)



1. Déterminer les complexes $z \neq 0$ tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module et les représenter géométriquement.
2. Déterminer les complexes z tels que $(z - i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R}$ et les représenter géométriquement.
3. Déterminer les complexes z tels que $(z - i)(\bar{z} - 1) \in i\mathbb{R}$ et les représenter géométriquement.

Correction.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z| \Leftrightarrow \left(|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \text{ et } |z| = |1 - z| \right) \Leftrightarrow (|z|^2 = 1 \text{ et } |z|^2 = |1 - z|^2).$$

Or, $|1 - z|^2 = (1 - z)(1 - \bar{z}) = 1 - (z + \bar{z}) + |z|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z| &\Leftrightarrow (|z|^2 = 1 \text{ et } \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow \left(\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ \text{ou} \\ z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les complexes z qui vérifient $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z|$ sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z - i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} (z - i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (z - i)(\bar{z} - 1) = \overline{(z - i)(\bar{z} - 1)} \\ &\Leftrightarrow (z - i)(\bar{z} - 1) = (\bar{z} + i)(z - 1) \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - z - i\bar{z} + i = \bar{z}z - \bar{z} + iz - i \\ &\Leftrightarrow \bar{z} - z - i(\bar{z} + z) + 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow -2i\operatorname{Im}(z) - 2i\operatorname{Re}(z) + 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow -\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) + 1 = 0. \end{aligned}$$

En posant $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve donc

$$(z - i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Finalement, les complexes vérifiant $(z - i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R}$ sont les complexes dont les points images sont situés sur la droite d'équation $y = -x + 1$.

3. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z - i)(\bar{z} - 1) \in i\mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
 (z - i)(\bar{z} - 1) \in i\mathbb{R} &\iff (z - i)(\bar{z} - 1) = -\overline{(z - i)(\bar{z} - 1)} \\
 &\iff (z - i)(\bar{z} - 1) = -(\bar{z} + i)(z - 1) \\
 &\iff z\bar{z} - z - i\bar{z} + i = -\bar{z}z + \bar{z} - iz + i \\
 &\iff 2z\bar{z} - (z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 0 \\
 &\iff 2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 0 \\
 &\iff |z|^2 - \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = 0.
 \end{aligned}$$

En posant $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve donc

$$(z - i)(\bar{z} - 1) \in i\mathbb{R} \iff x^2 + y^2 - x - y = 0.$$

Or, par complétion des carrés, on a

$$x^2 + y^2 - x - y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Finalement,

$$(z - i)(\bar{z} - 1) \in i\mathbb{R} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = r^2.$$

Ainsi, les complexes vérifiant $(z - i)(\bar{z} - 1) \in i\mathbb{R}$ sont les affixes des points du cercle, de centre Ω d'affixe $\frac{1+i}{2}$, et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

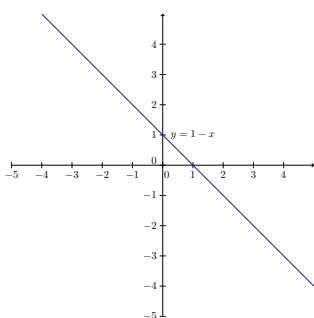


FIGURE 1 – Question 2

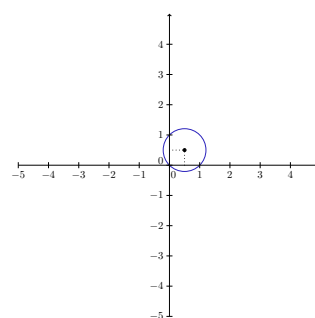


FIGURE 2 – Question 3

Exercice 32 (Triangle équilatéral)

Soient A , B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a , b et c . On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = j$ et que $-e^{i\frac{\pi}{3}} = j^2$.
2. En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.

Correction.

$$1. \quad \bullet \quad e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3} = j.$$

$$\bullet \quad -e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i4\pi/3} = (e^{i2\pi/3})^2 = j^2.$$

2.

Le triangle ABC est équilatéral $\iff A$ est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$

$$\iff a - b = e^{i\pi/3}(c - b) \text{ ou } a - b = e^{-i\pi/3}(c - b).$$

D'une part, $a - b = e^{i\pi/3}(c - b) \iff a + (e^{i\pi/3} - 1)b - e^{i\pi/3}c = 0 \iff a + bj + cj^2 = 0$.

D'autre part, $a - b = e^{-i\pi/3}(c - b) \iff a + (e^{-i\pi/3} - 1)b - e^{-i\pi/3}c = 0 \iff a + bj^2 + cj = 0 \iff a + bj^2 + cj = 0$, car $j^2 = \bar{j}$.

Ainsi, ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.

Exercice 33 (Orthocentre)

Soient A , B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a , b et c .

Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC , c'est-à-dire le point de concours des hauteurs.

Correction. (💡) Il s'agit de démontrer que $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ (les deux autres relations d'orthogonalité obtenues par permutations circulaires s'en déduisant par symétrie). On a :

$$\vec{AH} \perp \vec{BC} \iff \frac{h - a}{c - b} \in i\mathbb{R} \iff \frac{c + b}{c - b} \in i\mathbb{R}.$$

On a, puisque b et c appartiennent à $\mathbb{U}$:

$$\overline{\left(\frac{c + b}{c - b}\right)} = \frac{\bar{c} + \bar{b}}{\bar{c} - \bar{b}} = \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{b + c}{b - c} = -\frac{c + b}{c - b},$$

Ainsi on a bien $\frac{c + b}{c - b} \in i\mathbb{R}$, donc d'après les équivalences précédentes : $\vec{AH} \perp \vec{BC}$.

Remarque. On peut aussi écrire $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$ et factoriser par l'angle moitié.

Exercice 34 (Condition d'alignement)

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et N d'affixe iz .

Correction.

- Si $z \in \{0, 1, i\}$ alors deux des points sont confondus, donc les trois points M, N et I sont alignés.
- Supposons maintenant que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$. Alors les trois points sont distincts, et d'après le cours :

I, M, N sont alignés ssi $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{IM}$

$$\text{ssi } \frac{z_N - z_I}{z_M - z_I} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ssi } Z := \frac{iz - i}{z - i} \in \mathbb{R}.$$

On peut montrer que $\text{Im}Z = 0$ ou encore que $\overline{Z} = Z$.

Notons $z = x + iy$. Alors, $Z = \frac{iz - i}{z - i} = \frac{(-y + i(x - 1))(x - i(y - 1))}{x^2 + (y - 1)^2}$ donc

$$\text{Im}Z = 0 \iff x(x - 1) + y(y - 1) = 0 \iff x^2 - x + y^2 - y = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, I, M, N sont alignés et distincts ssi M appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$,
où Ω est de point du plan complexe d'affixe $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

2. Déterminer de plus le lieu des points N correspondants.

Correction. Soit M un point du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Méthode 1. N a pour affixe $iz = e^{i\pi/2}z$ donc N est l'image de M par la rotation de centre O (l'origine du repère) et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On conjecture que l'image d'un cercle par une rotation est un cercle, de même rayon, avec un nouveau centre à déterminer.

Montrons-le. On a :

$$M \in \mathcal{C}(\Omega, \frac{1}{\sqrt{2}}) \iff \Omega M = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff |z - \omega| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff |iz - i\omega| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff N\Omega' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ où } \Omega' \text{ est le point du plan d'affixe } \omega' = i\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$\iff N \in \mathcal{C}(\Omega', \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Donc les points N se trouvent sur le cercle de centre Ω' (d'affixe $\omega' = i\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Méthode 2. Si $z = x + iy$, N a pour affixe $iz = -y + xi$. Posons $x_N = -y$ la partie réelle de iz et $y_N = x$ la partie imaginaire de iz .

D'après la question 1,

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\ \left(y_N - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-x_N - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\ \left(x_N + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_N - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

donc N est sur le cercle de centre Ω' d'affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.