Dimensions

Exercice 1. *Montrer que les espaces suivants sont des espaces vectoriels et déterminer leur dimension. On donnera une base pour chacun.*

1. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\}$.
2. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$.
3. $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.
4. $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x - \varphi)\}$.
5. $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
6. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

Correction.

1. *Soit* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. *On a :* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \iff x_3 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + 3x_4)$ *donc* $\boxed{E = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)}$ *où* $e_1 = (1, 0, \frac{1}{2}, 0)$, $e_2 = (0, 1, \frac{1}{2}, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, \frac{3}{2}, 1)$, *donc* $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$ *et* (e_1, e_2, e_3) *est une famille génératrice de* E. *De plus, on vérifie aisément que* (e_1, e_2, e_3) *est libre.* *On en déduit que* $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } E}$.

2. *Soit* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. *On a :* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff x = (x_1, -x_1, x_3, -x_3)$ *donc* $E = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ *où* $e_1 = (1, -1, 0, 0)$ *et* $e_2 = (0, 0, 1, -1)$ *d'où* $\boxed{E \text{ est un s.e.v. de } \mathbb{R}^4}$, *engendré par* (e_1, e_2). *De plus, les vecteurs* e_1 *et* e_2 *ne sont pas colinéaires donc* $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } E}$ *et* $\boxed{\dim E = 2}$.

3. *Pour tout* $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} = aA + bB$ *avec* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *Ainsi,* $\underline{\Gamma = \operatorname{Vect}(A, B)}$ *donc* $\boxed{\Gamma \text{ est un ssev de } \mathscr{M}_2(\mathbb{K})}$.
   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *On a :* $aA + bB = 0 \implies \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a-b}{2} = 0 \implies a = b = 0$, *ce qui prouve que* (A, B) *est libre. Ainsi,* $\underline{(A, B) \text{ est une base de } \Gamma}$ *donc* $\boxed{\dim \Gamma = 2}$.

4. *On a déjà montré que* E *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *et même que* $E = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$.
   De plus, la famille $(\cos, \sin)$ *est libre. En effet, soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a\cos + b\sin = 0$. *Alors en évaluant en 0, on obtient :* $a = 0$ *et en évaluant en* $\frac{\pi}{2}$, *on obtient :* $b = 0$.
   Ainsi, $\boxed{(\cos, \sin) \text{ est une base de } E}$ *donc* $\boxed{\dim(E) = 2}$.

   - *Montrons que* E *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *La fonction nulle appartient à* E *et* E *est clairement stable par multiplication par un scalaire. Vérifions la stabilité par somme.*
     Soient $f, g \in E$. *Alors il existe* a, b, φ, ψ *tels que* $f : x \mapsto a\cos(x - \varphi)$ *et* $g : x \mapsto b\cos(x - \psi)$.

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (f+g)(x) &= a\cos(x-\varphi) + b\cos(x-\psi)\\ &= a\cos x\cos\varphi + a\sin x\sin\varphi + b\cos x\cos\psi + b\sin x\sin\varphi\\ &= \cos x(a\cos\varphi + b\cos\psi) + \sin x(a\sin\varphi + b\sin\psi)\\ &= A\cos x + B\sin x.\end{aligned}$$

Si $(A,B)=(0,0)$ *alors* $f+g=0$ *donc* $f+g\in E$.
Sinon, $(A,B)\neq(0,0)$*, et il existe* $\theta\in\mathbb{R}$ *tel que* $\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ *et* $\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$*, d'où* $\forall x\in\mathbb{R},\ (f+g)(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\theta)$ *et là encore,* $f+g\in E$.
On en déduit que $\boxed{E \text{ est un s.e.v. de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

- *Soit* $f\in E$. *Alors* $\exists(a,\varphi)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x-\varphi) = a\cos x\cos\varphi + a\sin x\sin\varphi \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$. *Donc* $\underline{E\subset \mathrm{Vect}(\cos,\sin)}$.
- *Réciproquement,* $\cos\in E$ *(en prenant* $a=1$ *et* $\varphi=0$*) et* $\sin\in E$ *(en prenant* $a=1$ *et* $\varphi=\frac{\pi}{2}$*). Puis,* E *étant un s.e.v., il est stable par CL donc* $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)\subset E$.
- *Ainsi,* $\boxed{E=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)}$ *i.e.* $(\cos,\sin)$ *est génératrice de* E.

5. $\boxed{\subset}$ **Méthode 1.** *Soit* $P\in E$. *D'après la formule de Taylor en 1, on a :* $P = \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2$*, donc* $E\subset\mathrm{Vect}\left((X-1)^2\right)$.
Méthode 2. *Soit* $P\in E$. *Alors* 1 *est racine de* P *de multiplicité au moins 2, donc* $(X-1)^2|P$ *et comme* $\deg P\leq 2$*, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que* $P=\lambda(X-1)^2$*, donc* $E\subset\mathrm{Vect}\left((X-1)^2\right)$.
$\boxed{\supset}$ *Réciproquement, pour tout* $\lambda\in\mathbb{K}$*, le polynôme* $\lambda(X-1)^2$ *est bien dans* E *donc* $\boxed{E=\mathrm{Vect}\left((X-1)^2\right)}$.
Ainsi, E *est un espace vectoriel engendré par un polynôme non nul donc* $\boxed{\dim(E)=1}$.

6. **Méthode 1 (futée).** *Toujours d'après la formule de Taylor en 1, on a :* $E\subset\mathrm{Vect}\left((X-1)^2,(X-1)^3\right)$.
Réciproquement, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$*, le polynôme* $P=\lambda(X-1)^2+\mu(X-1)^3$ *est bien dans* E *(en effet, il est divisible par* $(X-1)^2$*, donc* 1 *est racine de* P *de multiplicité* ≥ 2 *donc* $P(1)=P'(1)=0$*).*
Ainsi, $\boxed{E=\mathrm{Vect}\left((X-1)^2,(X-1)^3\right)}$. *Donc* E *est un espace vectoriel, engendré par deux polynômes non nuls et échelonnés en degré d'où* $\boxed{\dim(E)=2}$.
Méthode 2 (laborieuse). *On a :*

$$\begin{aligned}E &= \{aX^3+bX^2+cX+d \mid (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\ a+b+c+d=0,\ 3a+2b+c=0\}\\ &= \{aX^3+bX^2+(-3a-2b)X+(2a+b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(X^3-3X+2, X^2-2X+1\right)\end{aligned}$$

Puisque les polynômes X^3-3X+2 *et* X^2-2X+1 *sont non nuls et à degrés échelonnés, ils forment une famille libre donc une base de* E *et* $\dim(E)=2$.

Exercice 2. *Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes, ainsi que les dimensions de ces sous-espaces vectoriels.*

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-2z, z-2x) \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array}$

3. $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ *(pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé)*

Correction.

1. *Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a : $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=y=z=0$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0\}}$ (donc f est injective) et $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0}$.*
   Méthode 1. *$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < +\infty$ et dans ce cas f injective ssi f surjective ssi f bijective. On en déduit donc que f est surjective et $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$.*
   Méthode 2. *$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < +\infty$ donc d'après le théorème du rang : $3 = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$ puis $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$. Comme on a l'inclusion automatique $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ et l'égalité des dimensions, ces espaces vectoriels sont égaux : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$.*

2. *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow d = -a$ donc $\mathrm{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)}$ où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
   De plus, (M_1, M_2, M_3) est libre donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 3}$.
   N.B. : *$\mathrm{Ker}(g)$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.*
   g est une forme linéaire non nulle (car $g(I_2) = 2$) donc $\boxed{\mathrm{rg}(g) = 1}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(g) = \mathbb{C}}$.

3. - *Il est évident que $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\Delta$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = 0$. Alors on a $P(X+1) = P(X)$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) = P(0)$, donc le polynôme $P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines (tous les entiers). Par suite, il est nul et P est constant. Ainsi, on a $\boxed{\mathrm{Ker}\Delta = \mathbb{K}_0[X]}$.*
   - *D'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}\Delta) = n$. Comme $\mathrm{Im}\Delta$ est évidemment incluse dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (car les polynômes $P(X)$ et $P(X+1)$ ont le même coefficient en X^n), on en déduit, par égalité des dimensions, que $\boxed{\mathrm{Im}\Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]}$.*

Exercice 3. Espaces de matrices. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les dimensions :*

(i) *de l'espace $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales ;*

(ii) *de l'espace $T_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures ;*

(iii) *de l'espace $T_n^-(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures ;*

(iv) *de l'espace $S_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques ;*

(v) *de l'espace $A_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques ;*

Correction. $\boxed{\textit{La dimension de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \textit{ est } n^2}$. *La base canonique $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, qui a n^2 éléments, en atteste.*

Dans la plupart des cas, nous donnerons deux démonstrations, dont la première sera toujours d'exhiber une base.

(i) **Première méthode.** *Montrons que la famille $\mathscr{B}_{D_n(\mathbb{K})} := (E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ est une base de $D_n(\mathbb{K})$, ce qui donnera* $\boxed{\dim D_n(\mathbb{K}) = n}$.

- *Déjà, clairement, $\forall i \in [\![1,n]\!], E_{i,i} \in D_n(\mathbb{K})$.*
- *Comme la famille $\mathscr{B}_{D_n(\mathbb{K})}$ est une sous-famille de la base canonique, elle est libre.*
- *Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in D_n(\mathbb{K})$.*
  On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0$, et donc
  $$M = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}.$$
  Cela montre $M \in \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{D_n(\mathbb{K})}\right)$ et, donc, que $\mathscr{B}_{D_n(\mathbb{K})}$ est génératrice de $D_n(\mathbb{K})$.

Deuxième méthode. *Considérons l'application*

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & D_n(\mathbb{K}) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{array}$$

- *Cette application est bien définie.*
- *On montre directement qu'elle est linéaire, c'est-à-dire que $\phi \in \mathcal{L}(K^n, D_n(\mathbb{K}))$.*
- *Cette application est injective. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{Ker}\phi$. On a $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. En particulier, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le coefficient (i,i) de $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ doit être nul, ce qui montre $\lambda_i = 0$. Puisque cela est vrai pour tout i, on a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}\phi = \{0\}$, ce qui montre que ϕ est injective.*
- *Cette application est surjective. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in D_n(\mathbb{K})$. Tous les coefficients hors diagonale de M sont nuls, donc*
  $$M = \mathrm{Diag}(m_{1,1}, \dots, m_{n,n}) = \phi(m_{1,1}, \dots, m_{n,n}) \in \mathrm{Im}\phi.$$

Ainsi, ϕ est un isomorphisme, ce qui montre que $\boxed{\dim D_n(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^n = n}$.

(ii) *Montrons que la famille* $\mathscr{B}_{T_n^+(\mathbb{K})} = (E_{1,1}, \dots, E_{1,n}, E_{2,2}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n-1,n-1}, E_{n-1,n}, E_{n,n})$ *est une base de* $T_n^+(\mathbb{K})$*, ce qui montrera que* $\boxed{\dim T_n^+(\mathbb{K}) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}}$.

- *Déjà, clairement, quels que soient* i *et* $j \in [\![1, n]\!]$ *vérifiant* $i \leq j$*, on a* $E_{i,j} \in T_n^+(\mathbb{K})$ *:* $\mathscr{B}_{T_n^+(\mathbb{K})}$ *est bien une famille de matrices de* $T_n^+(\mathbb{K})$.
- *Comme la famille* $\mathscr{B}_{T_n^+(\mathbb{K})}$ *est une sous-famille de la base canonique, elle est libre.*
- *Soit* $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in T_n^+(\mathbb{K})$.
  On a donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i > j \Longrightarrow m_{i,j} = 0$*, et donc*

$$\begin{aligned} M &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} m_{i,j} E_{i,j}. \end{aligned}$$

  Cela montre $M \in \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{T_n^+(\mathbb{K})}\right)$ *et, donc, que* $\mathscr{B}_{T_n^+(\mathbb{K})}$ *est génératrice de* $T_n^+(\mathbb{K})$.

(iii) **Première méthode.** *On montre exactement comme au point précédent que*

$$\mathscr{B}_{T_n^-(\mathbb{K})} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n-1,1}, \dots, E_{n-1,n-1}, E_{n,1}, \dots, E_{n,n})$$

est une base de $T_n^-(\mathbb{K})$.

Deuxième méthode. *L'application* $\tau : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array}$ *est clairement un automorphisme de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *: sa linéarité est un résultat du cours, et le fait que* $\tau^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ *montre que c'est une symétrie, et donc un automorphisme.*
Comme $\tau\left(T_n^+(\mathbb{K})\right) = T_n^-(\mathbb{K})$*, cet automorphisme induit un isomorphisme* $\widetilde{\tau} : T_n^+(\mathbb{K}) \to T_n^-(\mathbb{K})$*. Ainsi, les sous-espaces vectoriels* $T_n^+(\mathbb{K})$ *et* $T_n^-(\mathbb{K})$ *sont isomorphes : ils ont donc la même dimension.*

Quelle que soit la méthode, on trouve $\boxed{\dim T_n^-(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}}$.

(iv) **Première méthode.** *Pour* $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ *tel que* $i \leq j$*, notons*

$$\Sigma_{i,j} = \begin{cases} E_{i,i} & \text{si } i = j \\ E_{i,j} + E_{j,i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que la famille

$$\mathscr{B}_{S_n(\mathbb{K})} = (\Sigma_{1,1}, \dots, \Sigma_{1,n}, \Sigma_{2,2}, \dots, \Sigma_{2,n}, \dots, \Sigma_{n-1,n-1}, \Sigma_{n-1,n}, \Sigma_{n,n})$$

est une base de $S_n(\mathbb{K})$.

- *Déjà, clairement, quels que soient $i \leq j$, $\Sigma_{i,j} \in S_n(\mathbb{K})$.*
- *Montrons que la famille $\mathscr{B}_{S_n(\mathbb{K})}$ est libre.*
  Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_{i,j}\Sigma_{i,j} = 0$.
  Cette relation se réécrit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,i}\Sigma_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = 0$$
$$\text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}E_{j,i} = 0$$
$$\text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq j<i\leq n} \lambda_{j,i}E_{i,j} = 0.$$

  Cette dernière assertion est une relation de liaison entre les vecteurs de la base canonique. À ce titre, elle doit être triviale, ce qui montre que, quel que soit i, $\lambda_{i,i} = 0$ et, quels que soient $i \leq j$, $\lambda_{i,j} = 0$.
  Notre famille de scalaires est donc triviale, ce qui achève la preuve de la liberté de $\mathscr{B}_{S_n(\mathbb{K})}$.
- *Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in S_n(\mathbb{K})$.*
  On a donc, quels que soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,j} = m_{j,i}$.
  On a

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq j<i\leq n} m_{i,j}E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\Sigma_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq j<i\leq n} m_{j,i}E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\Sigma_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\Sigma_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}\underbrace{(E_{i,j} + E_{j,i})}_{=\Sigma_{i,j}} \\
&= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} m_{i,j}\Sigma_{i,j},
\end{aligned}$$

  ce qui montre que $M \in \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{S_n(\mathbb{K})}\right)$ et, donc, que $\mathscr{B}_{S_n(\mathbb{K})}$ est génératrice de $S_n(\mathbb{K})$.

Remarque. *Dans le cas $n = 2$, la base que nous avons exhibée est donc*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Deuxième méthode. *Considérons l'application*

$$\begin{array}{rccl}\psi: & T_n^+(\mathbb{K}) & \to & S_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & M+M^T.\end{array}$$

- *Il est clair que ψ est bien définie.*
- *On montre sans difficulté que $\psi \in \mathcal{L}(T_n^+(\mathbb{K}), S_n(\mathbb{K}))$.*
- *Montrons que ψ est injective. Soit $M \in \operatorname{Ker}\psi$. On a donc $\psi(M) = M + M^T = 0$.*
  - *Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a*

    $$0 = \left[M + M^T\right]_{i,i} = [M]_{i,i} + [M^T]_{i,i} = 2[M]_{i,i},$$

    donc $[M]_{i,i} = 0$.
  - *Soit $i < j$ dans $[\![1,n]\!]$. On a*

    $$0 = \left[M + M^T\right]_{i,j} = [M]_{i,j} + \underbrace{[M]_{j,i}}_{=0},$$

    donc $[M]_{i,j} = 0$.

  Cela démontre $M = 0$. On a donc $\operatorname{Ker}\psi = \{0\}$, ce qui montre que ψ est injective.
- *Montrons que ψ est surjective. Soit $S \in S_n(\mathbb{K})$. Définissons la matrice $T \in M_n(\mathbb{K})$ par*

  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [T]_{i,j} = \begin{cases} [S]_{i,j} & \text{si } i < j \\ \frac{[S]_{i,j}}{2} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

  Il est clair que $T \in T_n^+(\mathbb{K})$.
  Montrons qu'alors $\psi(T) = T + T^T = S$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
  - *Si $i < j$, on a*

    $$[\psi(T)]_{i,j} = [T]_{i,j} + [T]_{j,i} = [S]_{i,j} + 0 = [S]_{i,j}.$$
  - *Si $i = j$, on a*

    $$[\psi(T)]_{i,i} = [T]_{i,i} + [T]_{i,i} = \frac{[S]_{i,j}}{2} + \frac{[S]_{i,j}}{2} = [S]_{i,j}.$$
  - *Si $i > j$, on a*

    $$[\psi(T)]_{i,j} = [T]_{i,j} + [T]_{j,i} = 0 + [S]_{j,i} = [S]_{j,i} = [S]_{i,j},$$

    car S est symétrique.

Ainsi, $\psi : T_n^+(\mathbb{K}) \to S_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme, ce qui montre que ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension.

Quelle que soit la méthode, on trouve $\boxed{\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}}$.

(v) **Première méthode.** *Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$, notons*

$$\Lambda_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}.$$

Montrons que la famille

$$\mathscr{B}_{A_n(\mathbb{K})} = (\Lambda_{1,2}, \dots, \Lambda_{1,n}, \Lambda_{2,3}, \dots, \Lambda_{2,n}, \dots, \Lambda_{n-1,n}).$$

est une base de $A_n(\mathbb{K})$.

- *Déjà, clairement, quels que soient $i<j$, $\Lambda_{i,j} \in A_n(\mathbb{K})$.*
- *Montrons que la famille $\mathscr{B}_{A_n(\mathbb{K})}$ est libre.*
  Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ une famille de scalaires telle que

  $$\sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}\Lambda_{i,j} = 0.$$

  Cette relation se réécrit

  $$\sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}(E_{i,j}-E_{j,i}) = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}E_{j,i} = 0$$
  $$\text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} 0\, E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\leq j<i\leq n} \lambda_{j,i}E_{i,j} = 0.$$

  Cette dernière assertion est une relation de liaison entre les vecteurs de la base canonique.
  À ce titre, elle doit être triviale, ce qui montre que, quels que soient $i<j$, $\lambda_{i,j}=0$.
  La famille $(\lambda_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ est donc triviale, ce qui achève la preuve de la liberté de $\mathscr{B}_{A_n(\mathbb{K})}$.
- *Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in A_n(\mathbb{K})$.*
  On a donc, quels que soient $i,j \in [\![1,n]\!]$, $m_{i,j} + m_{j,i} = 0$. En particulier, quel que soit $i \in [\![1,n]\!]$, $m_{i,i}=0$.
  On a

  $$\begin{aligned} M &= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leq j<i\leq n} m_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\leq j<i\leq n} m_{j,i}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{j,i} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}\underbrace{(E_{i,j}-E_{j,i})}_{=\Lambda_{i,j}}, \end{aligned}$$

  ce qui montre que $M \in \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_{A_n(\mathbb{K})}\right)$ et, donc, que $\mathscr{B}_{A_n(\mathbb{K})}$ est génératrice de $A_n(\mathbb{K})$.

Deuxième méthode. *Montrons que $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

On pourrait le faire à la main, mais le plus habile est de considérer

$$\begin{array}{rccl} \tau : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & M^T, \end{array}$$

dont on a vu qu'il s'agissait d'une symétrie.
Le théorème de classification des symétries montre alors que

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\mathrm{Ker}(\tau - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{K})})}_{=S_n(\mathbb{K})} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(\tau + \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{K})})}_{=A_n(\mathbb{K})}.$$

On a donc $\dim S_n(\mathbb{K}) + \dim A_n(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$*, ce qui montre que*

$$\dim A_n(\mathbb{K}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quelle que soit la méthode, on trouve $\boxed{\dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}}$.

Familles de vecteurs

Exercice 4. Endomorphisme nilpotent. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n*. Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpotence* $p \in \mathbb{N}^*$ *(c'est-à-dire* $p = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\right\}$*).*

1. *Montrer qu'il existe* $e \in E$ *tel que* $\left(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e)\right)$ *est libre.*
2. *Montrer que* $f^n = 0$.

Correction.

1. *Par définition de* p*, on a* $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$*. Donc il existe* $e \in E$ *tel que* $f^{p-1}(e) \neq 0_E$*.*
Pour ce vecteur e*, montrons que la famille* $\left(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e)\right)$ *est libre.*

Par l'absurde, en partant par la gauche

Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ *tels que*

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E. \qquad (\star)$$

Montrons que tous les λ_k *sont nuls.*

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un λ_k *non nul.*

Prenons l'indice i *le plus* ***petit*** *pour lequel* λ_i *est non nul, autrement dit posons*

$$i \;=\; \min\left\{k \in [\![0, p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\right\}$$

(c'est licite car l'ensemble en question est une partie de $\mathbb{N}$ *non vide).*

L'équation $(\star)$ *devient donc :*

$$\lambda_i f^i(e) + \lambda_{i+1} f^{i+1}(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E.$$

Appliquons f^{p-1-i} *(licite car* $p-1-i \in \mathbb{N}$*). On a alors*

$$\lambda_i f^{p-1}(e) + \lambda_{i+1} f^{p}(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2-i}(e) = 0_E.$$

Comme, pour tout $k \geq p$*, on a* $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$*, on en déduit*

$$\lambda_i f^{p-1}(e) = 0_E.$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ *est non nul, donc c'est le scalaire* λ_i *qui est nul, ce qui contredit la définition de* i*.*

Par récurrence (finie) « sur les scalaires »

Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ *tels que*

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E \qquad (\star)$$

Montrons que tous les λ_k *sont nuls.*

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$*, on note* $\mathcal{H}_k$ *: «* $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$ *».*

C'est une récurrence ***forte*** *déguisée en récurrence simple.*

- *Appliquons* f^{p-1} *à l'égalité initiale.*
  Comme, pour tout $i \geq p$*, on a* $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$*, on en déduit*

  $$\lambda_0 f^{p-1}(e) = 0_E.$$

  Le vecteur $f^{p-1}(e)$ *est non nul, donc c'est le scalaire* λ_0 *qui est nul.*
  D'où $\mathcal{H}_0$*.*
- *Soit* $k \in [\![0, p-2]\!]$ *tel que* $\mathcal{H}_k$*. Montrons* $\mathcal{H}_{k+1}$*.*
  D'après $\mathcal{H}_k$*, on a donc* $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0$*.*
  En reportant dans l'égalité $(\star)$*, on obtient*

  $$\lambda_{k+1} f^{k+1}(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E.$$

  Appliquons $f^{p-1-(k+1)}$ *(licite car* $p-2-k \in \mathbb{N}$*).*
  Comme, pour tout $i \geq p$*, on a* $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$*, on en déduit*

  $$\lambda_{k+1} f^{p-1}(e) = 0_E.$$

  Le vecteur $f^{p-1}(e)$ *est non nul, donc c'est le scalaire* λ_{k+1} *qui est nul.*
  On a donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = 0$*, d'où* $\mathcal{H}_{k+1}$*.*

- *Par théorème de récurrence, on a montré* $\forall\, k \in [\![0, p-1]\!],\ \mathcal{H}_k$.
- *En particulier,* $\mathcal{H}_{p-1}$ *est vraie. Donc tous les* λ_i *sont nuls !*

Par récurrence (descendante et finie) « sur la famille »

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, *notons* $\mathcal{H}_k$ *: « la famille* $\left(f^k(e), \dots, f^{p-1}(e)\right)$ *» est libre.*

- *Montrons* $\mathcal{H}_{p-1}$.
  La famille $(f^{p-1}(e))$ *est libre car elle est constituée d'un vecteur non nul.*
- *Soit* $k \in [\![1, p-1]\!]$. *Supposons* $\mathcal{H}_k$. *Montrons* $\mathcal{H}_{k-1}$.
  Fixons $\lambda_{k-1}, \cdots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\lambda_{k-1} f^{k-1}(e) + \lambda_k f^k(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E. \qquad (\clubsuit)$$

  Appliquons $f^{p-1-(k-1)}$.
  Comme, pour tout $i \geq p$, *on a* $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$, *on en déduit*

$$\lambda_{k-1} f^{p-1}(e) = 0_E.$$

  Le vecteur $f^{p-1}(e)$ *est non nul, donc c'est le scalaire* λ_{k-1} *qui est nul.*
  En reportant dans l'égalité $(\clubsuit)$, *on obtient*

$$\lambda_k f^k(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E.$$

  Or, d'après $\mathcal{H}_k$, *la famille* $\left(f^k(e), \dots, f^{p-1}(e)\right)$ *est libre, donc tous les scalaires sont nuls :*

$$\lambda_k = \cdots = \lambda_{p-1} = 0.$$

  En résumé, on a montré la nullité de tous les scalaires dans l'égalité $(\clubsuit)$.
  Cela signifie que la famille $\left(f^{k-1}(e), \dots, f^{p-1}(e)\right)$ *» est libre, d'où* $\mathcal{H}_{k-1}$.

Par récurrence (montante et finie) « sur la famille »

Pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, *notons* $\mathscr{P}_j$ *: « la famille* $\left(f^{p-1-j}(e), \dots, f^{p-1}(e)\right)$ *» est libre.*

A vous de continuer.

2. • *Montrons tout d'abord que* $p \leq n$.

   Le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

   La famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ *de cardinal* p *étant une famille libre de vecteurs de* E, *de dimension* n, *on en déduit* $\boxed{p \leq n}$.

   • *Ainsi, on peut écrire* n *sous la forme d'une somme de deux entiers naturels, à savoir* p *et* $n-p$.

   Donc $\boxed{f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ f^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

Exercice 5. Endomorphisme nilpotent d'indice maximal. *Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.*

Correction. *$f^{n-1} \neq 0$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, que l'on fixe.*
La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ contient n vecteurs de E et $\dim(E) = n$ donc il suffit de montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre pour conclure qu'elle est une base de E.
Montrons que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre :
Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0_E$ $(*)$.

Méthode 1 (par l'absurde à l'aide d'un min).
Supposons par l'absurde que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$. Considérons p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$.

> *Il existe alors $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a_{k_0} \neq 0$. Notons $A := \{k \in [\![0, n-1]\!] \mid a_k \neq 0\}$. Alors A est une partie non vide (contient k_0) de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément. Notons $\boxed{p = \min(A)}$.*

Alors (*) devient : $0 + a_p f^p(x_0) + \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n-1} f^k(x_0) = 0_E$. En appliquant $f^{n-1-p} \in \mathcal{L}(E)$, et puisque $f^n = 0$, on obtient : $a_p f^{n-1}(x_0) = 0_E$.
Or, $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ par définition de x_0, donc par propriété des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on obtient $a_p = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = 0_{\mathbb{K}^n}$, ce qui prouve que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

Méthode 2. *Montrons,* **par récurrence forte finie**, *que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$.*

- *En appliquant f^{n-1} (qui est linéaire) à $(*)$, et puisque $f^n = 0$, on obtient : $a_0 f^{n-1}(x_0) + 0 = 0$. Or, $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ donc $a_0 = 0$.*
- *Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $a_0 = 0, \dots, a_k = 0$. Montrons $a_{k+1} = 0$.*
  En appliquant $f^{n-2-k} \in \mathcal{L}(E)$, et puisque $f^n = 0$, on obtient : $a_{k+1} f^{n-1}(x_0) + 0 = 0$. Or, $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ donc $a_{k+1} = 0$.
- *Par théorème de récurrence, on a donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k = 0$, donc $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.*

Exercice 6. Polynôme annulateur d'une matrice carrée. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
Montrer qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Correction. *Considérons la famille $(I, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
Cette famille est liée (car elle est constituée de $n^2 + 1$ vecteurs de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2).
Il existe donc une relation de liaison non triviale entre les éléments de cette famille, c'est-à-dire entre des puissances de A.

Précisément, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ différent de l'uplet nul tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$.
Ce polynôme n'est pas nul car les λ_k sont non tous nuls et vérifie $P(A) = 0$.

Autre solution. *Considérons l'application*

$$\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

Cette application est linéaire.
De plus, elle ne peut pas être injective car $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie alors que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie(nous ne l'avons pas démontré, mais je vous invite à essayer de montrer qu'un espace de dimension infinie ne peut pas s'injecter dans un espace de dimension finie).

Variation des deux solutions précédentes. *Considérons l'application*

$$\psi_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n^2}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

Cette application est linéaire.
De plus, elle ne peut pas être injective car sinon au aurait $\underbrace{\dim \mathbb{K}_{n^2}[X]}_{n^2+1} \leq \underbrace{\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}_{n^2}$.

Remarque. *On vient de montrer qu'une matrice carrée de taille n admet au moins un polynôme annulateur (ici, de degré $\leq n^2$).*
Vous apprendrez en Spé que la matrice A possède un polynôme annulateur unitaire de degré n : c'est le théorème de Cayley-Hamilton.
En taille 2, on a déjà vu passer le théorème de Cayley-Hamilton.
En effet, pour une matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, on a la relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$.
Donc le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ est un polynôme annulateur de A.
Et au passage, on constate que $a + d = \mathrm{Tr} A$ et $ad - bc = \det A$.

Exercice 7. Une base du dual. *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note α, β et γ les formes linéaires sur E définies par :*

$$\alpha : (x,y,z) \mapsto x+y-z, \quad \beta : (x,y,z) \mapsto x-z, \quad \gamma : (x,y,z) \mapsto 2x+y.$$

Montrer que (α, β, γ) est une base de E^*.

Correction. *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}$.*
En évaluant cette égalité d'application en les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on obtient en particulier le système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} a+b+2c & = 0 \\ a+c & = 0 \\ -a-b & = 0 \end{array} \right. .$$

Sa résolution mène à $a = b = c = 0$. Ainsi, (α, β, γ) est une famille libre de E^*.
Or, $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}^3) \times \dim(\mathbb{R}) = 3$.
Ainsi, $\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) \text{ est une base de } E^*}$.

Exercice 8. Non génératrice. *Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.*
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (v_i - v_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ n'est pas génératrice de E.

On pourra noter $x_i = v_i - v_1$, et montrer que chaque vecteur de la famille $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire de $x_2, \ldots, x_n$.

Correction. *Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on note $x_k = v_k - v_1$.*
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Alors $j \neq 1$

- *Si $i = 1$, alors $v_i - v_j = v_1 - v_j = -x_j \in \mathrm{Vect}\,(x_2, \ldots, x_n)$.*
- *Sinon, $i > 1$, donc $v_i - v_j = x_i - x_j \in \mathrm{Vect}\,(x_2, \ldots, x_n)$ (en tant que différence de deux éléments de $\mathrm{Vect}\,(x_2, \ldots, x_n)$).*

On a donc montré que tout élément de $\mathcal{F}$ est dans $\mathrm{Vect}\,(x_2, \ldots, x_n)$, d'où

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Vect}\,(x_2, \ldots, x_n)\,,$$

donc $\dim(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})) \leq n - 1$, donc $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subsetneq E$, ce qui montre que $\boxed{\mathcal{F} \text{ n'est pas génératrice de } E}$.

Applications linéaires

Exercice 9. Une vieille connaissance. *Soit E un espace vectoriel quelconque (pas nécessairement de dimension finie). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ *et* $\mathrm{Im} f \supset \mathrm{Im} f^2$.
2. *Montrer que*
$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}.$$
3. *Montrer que*
$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \iff E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f.$$
4. *On suppose E de dimension finie. Montrer que*
$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$$
et
$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \iff E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f.$$

Correction.

1. *Montrons que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.*
Soit $x \in \mathrm{Ker} f$.
Alors $f(x) = 0_E$.
En appliquant f, on trouve $f(f(x)) = f(0_E)$.
Comme f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_E$.
Ainsi, $f^2(x) = 0_E$, donc $x \in \mathrm{Ker} f^2$.

Montrons que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.
Soit $y \in \mathrm{Im} f^2$.

Ainsi y s'écrit $f^2(x)$ pour un certain x, alors y s'écrit $f(t)$ pour un certain t (à savoir $t = f(x)$). Donc $y \in \mathrm{Im} f$.

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$ (en fait on est en train de supposer que $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$).*

   Montrons que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

   Soit $y \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$. Alors on a deux informations : $f(y) = 0_E$ et on peut considérer $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En mettant ensemble ces deux informations, on a $f(f(x)) = 0_E$, d'où $f^2(x) = 0_E$, donc $x \in \mathrm{Ker} f^2$.

   Or par hypothèse, $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$, donc $x \in \mathrm{Ker} f$, d'où $f(x) = 0_E$. Or $y = f(x)$. Donc $y = 0_E$.

   On a donc montré que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f \subset \{0_E\}$, ce qui conclut l'implication directe.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ *Supposons que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.*

   Montrons que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

   Il suffit de montrer l'inclusion $\supset$, car l'autre inclusion est toujours vraie d'après la question 1.

   Soit donc $x \in \mathrm{Ker} f^2$.

   On a alors $f(f(x)) = 0_E$.

   Ainsi $f(x) \in \mathrm{Ker} f$.

   Or $f(x) \in \mathrm{Im} f$ par construction.

   On a donc

   $$f(x) \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f.$$

   Or, par hypothèse $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, donc $f(x) = 0_E$, ce qui signifie que $x \in \mathrm{Ker} f$.

3. $\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ (on suppose donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$, car l'autre inclusion est toujours vraie).*

   Montrons que $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$.

   Soit $x \in E$ que l'on cherche à écrire comme $\underbrace{y}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{z}_{\in \mathrm{Ker} f}$.

   Considérons le vecteur $f(x)$ (c'est un peu la seule chose que l'on puisse faire d'intelligent pour provoquer l'utilisation de l'hypothèse).

   C'est un élément de $\mathrm{Im} f$, donc d'après l'hypothèse, de $\mathrm{Im} f^2$.

   Comme $f(x) \in \mathrm{Im} f^2$, il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$.

   En faisant la différence et en utilisant la linéarité de f, on obtient

   $$f(x - f(a)) = 0,$$

   donc $x - f(a)$ est un élément de $\mathrm{Ker} f$.

   On peut donc écrire

   $$x = \underbrace{f(a)}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{(x - f(a))}_{\in \mathrm{Ker} f},$$

   ce que l'on voulait.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ *Supposons que $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$.*

Montrons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

Comme l'inclusion $\supset$ *est toujours vraie, il ne reste plus qu'à montrer* $\subset$.

Soit $w \in \mathrm{Im} f$. *Donc il existe* $x \in E$ *tel que* $w = f(x)$.

D'après l'hypothèse, il existe $a \in E$ *et* $z \in \mathrm{Ker} f$ *tel que*

$$x = f(a) + z.$$

En appliquant f *à cette égalité, on obtient* $f(x) = f^2(a) + 0_E$, *donc* $w = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$, *ce qu'il fallait montrer.*

4. *Les implications* $\boxed{\Longleftarrow}$ *sont vraies d'après les questions précédentes.*

   Occupons-nous des implications $\Longrightarrow$.

   - *Supposons que* $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

   Montrons que $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$. *Pour cela, montrons que* $\begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\} \\ \textit{et} & \\ \text{(ii)} & \dim E = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) \end{cases}$.

   L'égalité (i) *résulte de la question 2.*

   L'égalité (ii) *résulte du théorème du rang.*

   - *Supposons que* $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

   Montrons que $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$. *Pour cela, montrons que* $\begin{cases} \text{(i)} & E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f \\ \textit{et} & \\ \text{(ii)} & \dim E = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) \end{cases}$.

   L'égalité (i) *résulte de la question 3.*

   L'égalité (ii) *résulte du théorème du rang.*

Exercice 10. Noyaux et images itérés. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* E *de dimension finie égale à* n.

1. *Montrer qu'il existe* $p \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $\mathrm{Ker} u^p = \mathrm{Ker} u^{p+1}$.

Dans la suite, on considère un tel indice p.

2. *Montrer que :* $\forall k \geq p, \quad \mathrm{Ker} u^k = \mathrm{Ker} u^p$ *et* $\mathrm{Im} u^k = \mathrm{Im} u^p$.
3. *Montrer que* $E = \mathrm{Ker} u^p \oplus \mathrm{Im} u^p$.

Correction.

1. *Notons* $d_k = \dim \mathrm{Ker} u^k$.

   Comme pour tout k, *on a* $\mathrm{Ker} u^k \subset \mathrm{Ker} u^{k+1}$, *il suffit de montrer qu'il existe* $p \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $d_p = d_{p+1}$.

   Les entiers d_k *appartiennent à* $[\![0, n]\!]$.

   Considérons $d_0, d_1, \ldots, d_{n+1}$ *: ils sont au nombre de* $n + 2$.

   D'après le principe des tiroirs, il existe nécessairement deux d_k *égaux.*

   On a donc montré qu'il existe $(i, j) \in [\![0, n+1]\!]^2$ *tel que* $i < j$ *et* $d_i = d_j$.

Comme par ailleurs on a

$$d_0 \leq d_1 \leq \cdots d_i \leq \cdots \leq d_j \leq \cdots \leq d_n$$

il y a des égalités partout entre d_i et d_j. En particulier, on a $d_i = d_{i+1}$ avec $i \in [\![0, n]\!]$ (car $i < j \leq n+1$ et par propriété des entiers $i < i+1 \leq j$).

2. • *Montrons d'abord que* $\boxed{\forall\, k \geq p,\ \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}}$.

   Soit $k \geq p$.

   L'inclusion $\subset$ est évidente.

   Soit $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

   Montrons que $x \in \operatorname{Ker} u^k$.

   On va exploiter à fond l'égalité d'entiers naturels

   $$k+1 = (p+1) + (k-p) \qquad \textit{puis} \qquad k = p + (k-p).$$

   On a $u^{k+1}(x) = 0$.

   D'où $u^{p+1}(u^{k-p}(x)) = 0$, d'où $u^{k-p}(x) \in \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

   Or $\operatorname{Ker} u^{p+1} = \operatorname{Ker} u^p$, donc $u^{k-p}(x) \in \operatorname{Ker} u^p$.

   D'où $u^p(u^{k-p}(x)) = 0$,

   D'où $u^k(x) = 0$.

   D'où $x \in \operatorname{Ker} u^k$.

   • *On montre ensuite par récurrence que* $\boxed{\forall\, k \geq p,\ \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^p}$ *(l'hérédité est immédiate avec le point précédent).*

   • *Montrons* $\forall\, k \geq p,\ \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$.

   Soit $k \geq p$.

   On a toujours $\operatorname{Im} u^k \subset \operatorname{Im} u^p$.

   Par ailleurs, on sait que $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^k$, donc par le théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Im} u^p) = \dim(\operatorname{Im} u^k)$.

   Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit $\boxed{\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^k}$.

3. *D'après le théorème du rang appliqué à u^p, on a l'égalité*

   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u^p + \dim \operatorname{Im} u^p.$$

   Il reste à montrer que la somme de $\operatorname{Ker} u^p$ et $\operatorname{Im} u^p$ est directe.

   Soit $x \in \operatorname{Ker} u^p \cap \operatorname{Im} u^p$.

   Ainsi, $\begin{cases} u^p(x) = 0 \\ x \text{ s'écrit } u^p(t) \end{cases}$. *Ainsi, $u^{2p}(t) = 0$, d'où $t \in \operatorname{Ker} u^{2p}$.*

   Or d'après la question 2, on a $\underline{\operatorname{Ker} u^{2p} = \operatorname{Ker} u^p}$, d'où $t \in \operatorname{Ker} u^p$, d'où $u^p(t) = 0$, d'où $x = 0$.

Exercice 11. Noyau, image transverse. *Cf plus loin.*

Exercice 12. Interpolation d'Hermite. *On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \ldots, y_n, y_n'$.*
Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = y_k'$.

Correction. *L'application*

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{2n+1}[X] & \to & \mathbb{C}^{2n+2} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \ldots, P(x_n), P'(x_0), \ldots, P'(x_n)) \end{array}$$

est linéaire et injective.
En effet, soit $P \in \mathrm{Ker}\Phi$. Alors $P \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ et $(P(x_0), \ldots, P(x_n), P'(x_0), \ldots, P'(x_n)) = (0, \ldots, 0)$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le complexe x_k est racine au moins double de P et comme $x_0, \ldots, x_n$ sont tous distincts, P possède au moins $2(n+1)$ racines comptées avec multiplicité. Or, $\deg P \leq 2n+1 < 2n+2$ donc $P = 0$.
De plus, $\dim \mathbb{C}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{C}^{2n+2} < +\infty$, donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, $\boxed{\Phi \text{ un isomorphisme}}$, d'où le résultat.
Remarque : Attention (si on était dans $\mathbb{R}$, mais ne fonctionne pas dans $\mathbb{C}$!), on aurait aussi pu dire : *$P(x_0) = \cdots = P(x_n) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle, on peut trouver n racines de P', et on en avait déjà $n+1$ donc P' a au moins $2n+1$ racines distinctes. Puisque $\deg(P') \leq \deg P - 1 \leq 2n$, on en déduit que $P' = 0$, donc P est constant, et comme $P(x_0) = 0$, on a $P = 0$.*

Exercice 13. Construction d'une application linéaire à noyau et image fixés.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie.
Soient K un sous-espace vectoriel de E, et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.
Montrer qu'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Ker} u = K$ et $\mathrm{Im} u = V$, si et seulement si, $\dim K + \dim V = \dim E$.

Correction.

- *Sens direct : s'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Ker} u = K$ et $\mathrm{Im} u = V$, alors, par le théorème du rang, on a $\dim K + \dim V = \dim E$.*

- *Sens réciproque. Supposons que $\dim K + \dim V = \dim E$, et construisons $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Ker} u = K$ et $\mathrm{Im} u = V$.*
  Soit S un supplémentaire de K dans E. On a alors $\dim K + \dim S = \dim E$, donc $\dim S = \dim V$.
  Par suite, les espaces <u>S et V sont isomorphes</u> : soit <u>$\phi \in \mathcal{L}(S, V)$ un isomorphisme</u>.
  Considérons alors l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$, <u>définie par ses restrictions à chacun des deux sous-espaces vectoriels supplémentaires K et S</u> :

  $$\forall x \in K,\ u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in S,\ u(x) = \phi(x).$$

  Par construction, on a immédiatement $\underline{K \subset \mathrm{Ker} u}$. On a de plus $\underline{V \subset \mathrm{Im} u}$ car pour tout $y \in V$, la surjectivité de ϕ assure l'existence de $x \in S$ tel que $\phi(x) = y$, et donc $u(x) = y$.
  Disposant déjà d'inclusions entre espaces de dimension finie, un argument de dimension permet d'en déduire les égalités souhaitées.
  En effet, le théorème du rang donne : $\dim(\mathrm{Ker} u) + \dim \mathrm{Im} u = \dim E = \dim K + \dim V$, ce qui

donne

$$\underbrace{(\dim \mathrm{Ker}(u) - \dim K)}_{\geq 0} + \underbrace{(\dim \mathrm{Im}(u) - \dim V)}_{\geq 0} = 0.$$

On a donc $\underline{\dim(\mathrm{Ker} u) = \dim K}$ *et* $\underline{\dim(\mathrm{Im} u) = \dim V}$. *D'où le résultat.*

Rang d'une famille de vecteur ou d'une application linéaire

Exercice 14. Rang de familles. *Déterminer le rang des familles suivantes.*

1. *Dans* $\mathbb{R}^4$, *la famille* $\mathcal{F} = ((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0))$.
2. *Dans* $\mathbb{C}[X]$, *la famille* $\mathcal{F} = \left(X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3\right)$.
3. *Dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$, *la famille* $\mathcal{F} = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ *où pour tout* $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\varphi_1(x,y,z,t) = x+z \quad ; \quad \varphi_2(x,y,z,t) = -x+2y \quad ; \quad \varphi_3(x,y,z,t) = x+y-z+t \quad ; \quad \varphi_4(x,y,z,t) = y+t.$$

Correction.

1. *Notons* e_1, e_2, e_3, e_4 *respectivement ces quatre vecteurs. Remarquons que* $e_4 = 2e_2 + 2e_3$ *(si on essaye de montrer que la famille est libre, on trouve cette liaison) donc*

$$\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4) = \dim(\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2,e_3,e_4)) = \dim(\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2,e_3)) = \mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3).$$

De plus, la famille (e_1,e_2,e_3) *est libre (il suffit de reprendre le système) donc* $\boxed{\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4) = 3}$.

2. *Remarquons que* $X^2+3X+1 = (X^2+X+1)+2X$, *donc le rang de* $\mathcal{F}$ *est le rang de la famille* $(X^2+X+1, 2X, X^3+3)$. *Cette dernière famille est constituée de polynômes non nuls et à degrés échelonnées donc elle est libre d'où* $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3}$.

3. *Regardons si la famille* $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ *est libre.*
Soit donc $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ *tel que* $\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\varphi_3+\alpha_4\varphi_4 = 0$ *(égalité d'applications). En choisissant pour* (x,y,z,t) *les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^4$, *on trouve que (on utilise que l'implication directe, mais on a en fait équivalence)*

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 &= 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_4) \\ \alpha_1-\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3+\alpha_4 &= 0 \end{cases} \quad \textit{donc} \quad \begin{cases} \alpha_1+\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1-\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3+\alpha_4 &= 0 \end{cases} \quad \textit{puis } \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0.$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ *est libre donc* $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) = 4}$.

Exercice 15. Sous-additivité du rang. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.*

Correction. *E étant de dimension finie, f, g et $f+g$ sont de rang fini.*
D'une part, on a pour toute application $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, donc en passant aux dimensions, on obtient : $\mathrm{rg}(f+g) \leq \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g))$.
Puis par conséquence de la formule de Grassmann, on a : $\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$, d'où $\boxed{\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)}$, ce qui montre la deuxième partie de l'inégalité.
D'autre part, d'après l'inégalité précédente : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f+g)+(-g)) \leq \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g)$.
Puisque g est linéaire, on a $\mathrm{Im}(-g) = \mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(g)$. Ainsi, $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f+g)$.
g et f jouent des rôles symétriques donc de la même façon, on obtient : $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g)$ i.e. $-(\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)) \leq \mathrm{rg}(f+g)$. Ainsi, $\boxed{|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g)}$.

Exercice 16. Cas d'égalité. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que*

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g = E \end{array} \right. .$$

Correction.

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g$.*

- *D'après la formule de Grassmann, on a*

$$\begin{aligned} 0 \leq \dim(\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g) &= \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g - \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g) \\ &\leq \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g - \mathrm{rg}(f+g) = 0, \end{aligned}$$

  car $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ donc (en passant aux dimensions) $\mathrm{rg}(f+g) \leq \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g)$.
  Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g) = 0$ puis $\boxed{\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}}$.
- *Encore d'après la formule de Grassmann, on a*

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g) &= \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Ker}g - \dim(\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g) \\ &\geq \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Ker}g - \dim(\mathrm{Ker}(f+g)) && \textit{car } (\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g) \subset \mathrm{Ker}(f+g) \\ &= \dim E - \mathrm{rg}f + \dim E - \mathrm{rg}g - \dim E + \mathrm{rg}(f+g) && \textit{th. du rang} \\ &= \dim E && \textit{hypothèse.} \end{aligned}$$

  Comme $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g$ est un ssev de E, on a aussi $\dim(\mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g) \leq \dim E$, donc l'égalité des dimensions et une inclusion, dont on déduit $\boxed{\mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g = E}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$.*
- *Montrons $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$.*
On a déjà l'inclusion automatique $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$.
Inversement, soit $x \in \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$. Il existe $(a,b) \in E^2$ tel que $x = f(a) + g(b)$.
Puisque $E = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g$, on peut écrire $a = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}f$ et $v \in \mathrm{Ker}g$. On a alors $f(a) = f(v)$.
De même, on peut écrire $g(b) = g(w)$ avec $w \in \mathrm{Ker}f$.

On a alors $x = f(v) + g(w) = (f+g)(v+w)$ car $f(w) = 0$ et $g(v) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Im}(f+g)$.
Finalement $\underline{\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g}$.
• Par hypothèse $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Im}g$ sont en somme directe, donc on sait (conséquence de la formule de Grassmann) que $\dim(\underbrace{\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g}_{=\mathrm{Im}(f+g)}) = \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Im}g)$, d'où $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g$.

Remarque 1. *On a le même résultat en supposant $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ où seulement E est de dimension finie.*
Remarque 2. *Certains ont prouvé l'une ou l'autre des implications en utilisant le lemme suivant :*

$$\textit{Si } \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}, \textit{ alors } \mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g.$$

> *Prouvons de ce lemme, en supposant que $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}$.*
> *On a l'inclusion automatique $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g \subset \mathrm{Ker}(f+g)$.*
> *Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. Alors $0 = f(x) + g(x)$, donc $f(x) = g(-x)$. D'où $f(x) \in \underbrace{\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g}_{=\{0\}}$ donc $f(x) = 0$, puis $g(x) = 0$. On a donc bien $x \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g$.*

Exercice 17. Formule du rang appliquée à une restriction. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.*

1. *En appliquant la formule du rang à la restriction de v à $\mathrm{Im}(u)$, montrer que :*

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v).$$

2. *En déduire que $\mathrm{rg}(v \circ u) \geq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u) - \dim F$.*

3. *Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(v \circ u) \leq \dim \mathrm{Ker}(v) + \dim \mathrm{Ker}(u)$.*

Correction.

1. *$v_{|\mathrm{Im}u} : \mathrm{Im}(u) \to G$ et $\mathrm{Im}(v_{|\mathrm{Im}u}) = \{v \circ u(x) \mid x \in E\} = \mathrm{Im}(v \circ u)$ et $\mathrm{Ker}(v_{|\mathrm{Im}u}) = \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v$. D'après la formule du rang : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v) + \mathrm{rg}(v \circ u)$, ce qui donne la formule souhaitée.*

2. *On a :*

$$\begin{aligned} rg(v \circ u) \geq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u) - \dim F &\iff \dim F - \mathrm{rg}(v) \geq \mathrm{rg}(u) - rg(v \circ u) \\ &\iff \dim(\mathrm{Ker}v) \geq \dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v), \end{aligned}$$

d'après 1. et la formule du rang appliquée à v.
Or, $(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v) \subset \mathrm{Ker}v$ donc $\dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v) \leq \dim(\mathrm{Ker}v)$. Par équivalences, on a donc l'inégalité souhaitée.

3. D'après la formule du rang appliquée à $v \circ u$, on a :

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Ker}(v \circ u) &= \dim E - \operatorname{rg}(v \circ u) && \text{d'après la formule du rang}\\
&\leq \dim E - \operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u) + \dim F && \text{d'après 2.}\\
&\leq (\dim E - \operatorname{rg}(u)) + (\dim(F) - \operatorname{rg}(v)) &&\\
&\leq \dim \operatorname{Ker}(u) + \dim \operatorname{Ker}(v) && \text{d'après la formule du rang.}
\end{aligned}$$

Exercice 18. Retour sur les projecteurs. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u + v = \operatorname{Id}_E$ et $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$. Montrer que u et v sont des projecteurs vérifiant $u \circ v = v \circ u = 0$.*

- **Remarque 1 :** *comme $v = \operatorname{Id}_E - u$, on a l'équivalence :*

$$v^2 = v \Longleftrightarrow (\operatorname{Id}_E - u)^2 = \operatorname{Id}_E - u \Longleftrightarrow \operatorname{Id}_E - 2u + u^2 = \operatorname{Id}_E - u \Longleftrightarrow u^2 = u.$$

  Ainsi, u est un projecteur si et seulement si v est un projecteur.
  Remarque 2 : *on a $u \circ v = u \circ (\operatorname{Id}_E - u) = u - u^2 = (\operatorname{Id}_E - u) \circ u = v \circ u$ donc u et v commutent, et*

$$u \circ v = 0 \Longleftrightarrow u^2 = u \Longleftrightarrow u \text{ est un projecteur.}$$

  Il suffit donc de montrer que $u \circ v = 0$ ou bien de montrer que u est un projecteur de E.
  Remarque 3 : $u \circ v = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

- **Première méthode.**

  - *D'une part, $E = \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) \subset E$, donc $\boxed{\operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) = E}$.*
    D'autre part, $n = \dim E = \operatorname{rg}(\operatorname{Id}_E) = \operatorname{rg}(u+v)$ et d'après l'exercice 15., $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ donc $n \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ et par hypothèse, $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$, donc $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n$.
    Par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on en conclut que $\boxed{\operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Im}(v) = E}$.
  - **Conclusion 1.** *On a $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im} u$ et, puisque u et v commutent, on a aussi $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$, donc $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im}(v) = \{0_E\}$ car les deux images sont en somme directe. On en déduit que $\boxed{u \circ v = v \circ u = 0}$, ce qui conclut.*
    Conclusion 2. *On peut montrer que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $x \in \operatorname{Im} v$. Puisque $\operatorname{Id}_E = u + v$, on peut décomposer x de deux manières sur $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$:*

$$x = \underbrace{0}_{\in \operatorname{Im} u} + \underbrace{x}_{\in \operatorname{Im} v} = \underbrace{u(x)}_{\in \operatorname{Im} u} + \underbrace{v(x)}_{\in \operatorname{Im} v}.$$

    Puisque la somme est directe, on a unicité d'une telle écriture, d'où $u(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} u$. On a donc $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ d'où $u \circ v = 0$, ce qui conclut.
    Conclusion 3. *Soit $x \in E$. Comme $\operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Im}(v) = E$, il existe $(x_u, x_v) \in \operatorname{Im}(u) \times \operatorname{Im}(v)$ tel que $x = x_u + x_v$. Par ailleurs, comme $\operatorname{Id}_E = u + v$, on a aussi $x = u(x) + v(x)$. On a donc*

$$\underbrace{x_u}_{\in \operatorname{Im} u} + \underbrace{x_v}_{\in \operatorname{Im} v} = \underbrace{u(x)}_{\in \operatorname{Im} u} + \underbrace{v(x)}_{\in \operatorname{Im} v}.$$

    Par unicité d'une telle écriture (vu que la somme est directe), on a $u(x) = x_u$ (et $v(x) = x_v$), donc u est l'application qui à tout $x \in E$ écrit sous la forme $x_u + x_v$ avec $(x_u, x_v) \in$

$\mathrm{Im}(u) \times \mathrm{Im}(v)$ *associe le vecteur* x_u*, i.e.* *u est la projection sur* $\mathrm{Im}(u)$ *parallèlement à* $\mathrm{Im}(v)$*. En particulier, u est un projecteur de E. De même, v est un projecteur de E, et on conclut avec la remarque 2.*

- **Deuxième méthode.** *On peut montrer uniquement que* $\mathrm{Im}v = \mathrm{Ker}u$*, grâce à l'inclusion réciproque et l'égalité des dimensions, ce qui conclura.*
  - ⋆ *D'une part, on a* $\forall x \in \mathrm{Ker}u,\ x = (u+v)(x) = \underbrace{u(x)}_{=0} + v(x) = v(x) \in \mathrm{Im}v$*, donc* $\underline{\mathrm{Ker}u \subset \mathrm{Im}v}$*.*
  - ⋆ *D'autre part, grâce au théorème du rang appliqué à u, L'hypothèse* $\mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v \leq n$ *se réécrit donc* $\mathrm{rg}v \leq \dim(\mathrm{Ker}u)$*.*
    De plus, l'inclusion $\mathrm{Ker}u \subset \mathrm{Im}v$ *assure que* $\dim(\mathrm{Ker}u) \leq \mathrm{rg}u$ *; d'où l'égalité souhaitée :* $\underline{\mathrm{rg}v = \dim(\mathrm{Ker}u)}$*.*

Remarque. *On a* $\mathrm{Im}v = \mathrm{Ker}u$ *et* $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}v = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$*, donc la somme directe des images se ré-écrit* $\underline{\mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = E}$*, ce qui permet de retrouver que* $\boxed{u \text{ est un projecteur de } E}$*.*

- **Troisième méthode.** *Grâce au théorème du rang (applicable car E est de dimension finie), on a :* $\mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v \leq n \iff n - \dim(\mathrm{Ker}u) + n - \dim(\mathrm{Ker}v) \leq n \iff \dim(\mathrm{Ker}u) + \dim(\mathrm{Ker}v) \geq n$*.*
  Comme on a supposé $\mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v \leq n$*, on en déduit*

$$\underline{\dim(\mathrm{Ker}u) + \dim(\mathrm{Ker}v) \geq n}.$$

Or, $\mathrm{Ker}u$ *et* $\mathrm{Ker}v$ *sont en somme directe.*

> *En effet, soit* $x \in \mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Ker}v$*. Alors* $x = \mathrm{Id}_E(x) = u(x) + v(x) = 0 + 0 = 0$*, donc* $\underline{\mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Ker}v = \{0\}}$*.*

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}v) = \dim(\mathrm{Ker}u) + \dim(\mathrm{Ker}v) \geq n$*. Or,* $\mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}v \subset E$ *donc* $\dim(\mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}v) \leq n$*, d'où l'égalité de dimensions.*
Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\underline{\mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}v = E}$*.*
Comme $v = u - \mathrm{Id}_E$*, cela se ré-écrit* $\underline{\mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = E}$*.*
Puisque $u \in \mathcal{L}(E)$*, on en déduit que* $\boxed{u \text{ est un projecteur de } E}$ *(cf rappel suivant), ce qui conclut.*

> *Rappel : Les restrictions de u à ces deux sous-espaces sont l'application nulle et l'identité et coïncident toutes deux avec leur carré, donc* $u^2 = u$*.*
> *Ou bien. Soit* $x \in E$*. Alors il existe un unique couple* $(x_K, x_I) \in \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ *tel que* $x = x_K + x_I$*.*
> *Donc* $u(x) = 0 + x_I$*, d'où* $u^2(x) = u(x_I) = x_I = u(x)$*, donc* $u^2 = u$*.*

Exercice 19. Endomorphismes tels que $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f$**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

1. *Montrer que n est pair si et seulement si* $\exists f \in \mathcal{L}(E) : \mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f$*.*
2. *On suppose n pair. Montrer que pour* $f \in \mathcal{L}(E)$*,* $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f \iff (\mathrm{rg}f = n/2$ *et* $f^2 = 0)$*.*

Correction.

1. *Procédons par double implication.*
   - *La condition est suffisante : le théorème du rang garantit que* $\dim E = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f$*. Si ces deux espaces coïncident, E est de dimension paire.*
   - *La condition est nécessaire : si n est pair, on peut trouver* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2p$ *et considérer*

$e_1, e_2, \dots, e_{2p}$ une base de E.
Soit f l'unique endomorphisme de E tel que $\forall j \leq p$, $f(e_j) = e_{j+p}$ et $\forall j > p$, $f(e_j) = 0$. Alors, on a clairement,

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_{p+1}), \dots, f(e_{2p})) = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \dots, e_{2p}) \subset \mathrm{Ker} f.$$

On peut remarquer que la dernière inclusion est une égalité par inclusion et égalité des dimensions : en effet, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \mathrm{rg} f = 2p - p = p = \dim \mathrm{Vect}\,\underbrace{(e_{p+1}, \dots, e_{2p})}_{\text{famille libre}}.$$

2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*
   - *Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$. Alors, pour tout x, $f(x) \in \mathrm{Ker} f$ donc $f^2(x) = 0$. Cela entraîne donc $f^2 = 0$. On a déjà vu à la question précédente que le théorème du rang entraînait que $\mathrm{rg} f = n/2$.*
   - *Supposons $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg} f = n/2$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = 0$, ce qui implique $f(x) \in \mathrm{Ker} f$. On a donc démontré $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. Par ailleurs, le théorème du rang entraîne que $\dim \mathrm{Ker} f = n - \mathrm{rg} f = n/2 = \mathrm{rg} f$.*
     Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$.

Exercice 20. Endomorphisme de rang 1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$.*

- **Version matricielle (après le chapitre représentations matricielles).** *Notons $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui représente φ. Alors $1 = \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. On peut donc trouver un vecteur colonne $C \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(C)$, où pour tout i, C_i est la $i$ème ligne de A. Alors : $\forall i$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} : C_i = \lambda_i C$ et $A = (\lambda_1 C \dots \lambda_n C) = CL$ où $L = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi, $A = CL$ et $A^2 = C(LC)L$. Notons λ le scalaire LC. Alors $A^2 = \lambda CL = \lambda A$. En repassant aux endomorphismes, il vient $\boxed{\varphi^2 = \lambda\varphi}$.*
  De plus, on a par propriété de la trace : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(CL) = \mathrm{Tr}(LC) = \mathrm{Tr}(\lambda) = \lambda$, donc $\boxed{\lambda = \mathrm{Tr}(A)}$.
- **Version endomorphisme.** *Par hypothèse, φ est de rang 1. Donc l'image de φ admet une base de cardinal 1 : on peut donc trouver $e \in E$ tel que $\boxed{\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(e)}$.*
  Comme $\varphi(e) \in \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(e)$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\boxed{\varphi(e) = \lambda e}$.
  Ce λ étant fixé, $\boxed{\text{montrons maintenant que } \varphi^2 = \lambda\varphi}$ (égalité d'endomorphismes).
  Soit $x \in E$.
  Comme $\varphi(x) \in \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(e)$, il existe μ_x tel que $\varphi(x) = \mu_x e$.
  D'où $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(\mu_x e) = \mu_x \varphi(e) = \mu_x \lambda e = \lambda \underbrace{\mu_x e}_{=\varphi(x)}$.
  On a montré $\forall\, x \in E,\ \varphi^2(x) = \lambda\varphi(x)$, ce qui conclut.

Espaces supplémentaires

Exercice 21. Noyaux, images transverses. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. On suppose que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.*
Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Correction. *E est de dimension finie donc les formules du rang et de Grassmann sont applicables.*

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) &= \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g - \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g) && \textit{Grassmann}\\
&= \mathrm{rg} f + (\mathrm{rg} g - \dim E) && \textit{hypothèse}\\
&= \dim E - \dim(\mathrm{Ker} f) - \dim(\mathrm{Ker} g) && \textit{th. du rang}\\
&= \dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g) - \dim(\mathrm{Ker} f) - \dim(\mathrm{Ker} g) && \textit{hypothèse}\\
&= -\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g) && \textit{Grassmann.}
\end{aligned}$$

Or, les dimensions appartiennent à $\mathbb{N}$, donc $\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) = \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g) = 0$ puis $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g = \{0\}$, ce qui prouve que $\boxed{\text{les sommes sont directes}}$.

Contre-exemple en dimension infinie. *Prenons $E = \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme f de dérivation $P \mapsto P'$ et g l'endomorphisme nul. On a $\mathrm{Ker} f = \mathbb{K}_0[X]$ et $\mathrm{Ker} g = \mathbb{K}[X]$ donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g \neq \{0\}$, d'où $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g$ mais pas $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker} g$.*

Exercice 22. Endomorphisme tel que $E = \mathrm{Ker} u \oplus \mathrm{Im} u$. *On pose $E = \mathbb{R}^3$. Soit l'application u définie sur E par $u : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3 - x_1\sqrt{2}, x_3 + x_2\sqrt{2}, x_1 + x_2)$.*

1. *Vérifier que u est un endomorphisme de E.*
2. *Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E)$.*
3. *Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E)$.*
4. *Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. u est-il un projecteur ?*

Correction.

1. - *Si $x \in \mathbb{R}^3$, $u(x)$ appartient bien à $\mathbb{R}^3$.*
   - *On prend $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^3$ i.e. $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$. Puis on vérifie que $u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y)$.*
2. *Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On a : $x \in E_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= \sqrt{2}x_1 \end{cases}$ Donc $E_0 = \mathrm{Vect}\,(e_0)$ où $e_0 = (1, -1, \sqrt{2})$.*

   $x \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= (3+2\sqrt{2})x_1 \\ x_3 &= (2+\sqrt{2})x_1 \end{cases}$ Donc $E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ où $e_2 = (1, 3+2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

   $x \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= (3-2\sqrt{2})x_1 \\ x_3 &= (\sqrt{2}-2)x_1 \end{cases}$ Donc $E_{-2} = \mathrm{Vect}\,(e_{-2})$ où $e_{-2} = (1, 3-2\sqrt{2}, \sqrt{2}-2)$.

3. • *$\underline{\mathrm{Im}(u)}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. et E_2 et E_{-2} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Im}(u)$ car stables par C.L. et inclus dans $\mathrm{Im}(u)$.*
   Lemme 1 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(u)$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in E,\ x \in \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id}_E) \Rightarrow u(x)=\lambda x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

   • **Lemme 2 :** $\forall \lambda \neq \mu,\ E_\lambda \cap E_\mu = \{0_E\}$.
   Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda \neq \mu$. Alors $u(x)=\lambda x = \mu x$. En faisant la différence, on obtient : $(\lambda-\mu)x = 0_E$. Or $\lambda-\mu \neq 0$ donc $x=0_E$. En particulier, $\underline{\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u+2\mathrm{Id}_E) = \{0\}}$.

   • *D'après la formule du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3-1 = 2 = \dim(E_2) + \dim(E_{-2})$.*

   • *Ainsi, $\boxed{E_2 \oplus E_{-2} = \mathrm{Im}(u)}$.*

Alternative. *On a $\mathrm{Vect}\,(e_2, e_{-2}) \subset \mathrm{Im}u$ et (e_2,e_{-2}) libre, donc l'inclusion et l'égalité des dimensions, donc $\mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}\,(e_2,e_{-2}) = \mathrm{Vect}\,(e_2) \oplus \mathrm{Vect}\,(e_{-2})$.*

4. • *$\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*

   • *D'après la formule du rang, on a : $\underline{\dim(\mathbb{R}^3) = \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rg}(u)}$.*

   • *On a $\underline{\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}}$. En effet, soit $x \in \mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Im}u$. $x \in \mathrm{Im}u$. Or, d'après la question précédente, $\mathrm{Im}u = E_2 \oplus E_{-2}$ donc : $\exists (y,z) \in E_2 \times E_{-2} \mid x = y+z$. Ainsi, $0 = u(x) = 2y-2z$ donc $y=z$. Ainsi, $x=2y$ puis $0=4y$ puis $y=z=0$ puis $x=0$.*

   • *Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3}$.*
   Alternative. *On a $\mathrm{Vect}\,(e_0,e_2,e_{-2}) \subset \mathbb{R}^3$ et (e_0,e_2,e_{-2}) libre (immédiat en revenant à la définition et en appliquant u), donc l'inclusion et l'égalité des dimensions, donc $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,(e_0,e_2,e_{-2}) = \mathrm{Vect}\,(e_0) \oplus \mathrm{Vect}\,(e_2,e_{-2}) = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.*

   • *$u \circ u \neq u$ donc u n'est pas un projecteur de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 23. Endomorphismes tels que $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$. *Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$ si et seulement si $(\mathrm{Im}u^2 = \mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u^2 = \mathrm{Ker}u)$.*
2. *On suppose E de dimension finie, montrer que*
$$E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u \iff \mathrm{Im}u^2 = \mathrm{Im}u \iff \mathrm{Ker}u^2 = \mathrm{Ker}u.$$
3. *L'équivalence $\mathrm{Im}u^2 = \mathrm{Im}u \iff \mathrm{Ker}u^2 = \mathrm{Ker}u$ est-elle valable en dimension infinie ?*

Correction.

1. *On procède par double équivalence.*
   - *Supposons $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.*
     - *L'inclusion $\mathrm{Im}u^2 \subset \mathrm{Im}u$ est tautologique.*
       Soit $y \in \mathrm{Im}u$. Soit $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On écrit, grâce à l'hypothèse, $x = u(t) + x_0$, avec $t \in E$ et $x_0 \in \mathrm{Ker}u$. On a donc $y = u(u(t) + x_0) = u(u(t)) = u^2(t)$, donc $y \in \mathrm{Im}u^2$.
       On a donc bien $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}u^2$.
     - *L'inclusion $\mathrm{Ker}u \subset \mathrm{Ker}u^2$ est tautologique. Soit $x \in \mathrm{Ker}u^2$. On a alors $u(x) \in \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}u$, donc $u(x) = 0$, ce qui prouve $x \in \mathrm{Ker}(u)$.*
       On a donc bien $\mathrm{Ker}u = \mathrm{Ker}u^2$.
   - *Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}u = \mathrm{Ker}u^2$ et $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}u^2$.*
     - *Soit $y \in \mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Im}u$. On peut donc trouver $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Cet élément vérifie alors $u^2(x) = u(y) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}u^2$, donc $x \in \mathrm{Ker}u$ et $y = 0$.*
       Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$ sont donc en somme directe.
     - *Soit $y \in E$. Par hypothèse, $u(y) \in \mathrm{Im}u^2$, donc il existe $x \in E$ tel que $u(y) = u^2(x)$. Les vecteurs y et $u(x)$ ont donc la même image par u, donc ils diffèrent d'un élément de $\mathrm{Ker}u$: on peut trouver $z \in \mathrm{Ker}u$ tel que $y = u(x) + z$, ce qui montre $y \in \mathrm{Im}u + \mathrm{Ker}u$.*

   On a donc bien $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$.
2. *Les inclusions $\mathrm{Ker}u \subset \mathrm{Ker}u^2$ et $\mathrm{Im}u^2 \subset \mathrm{Im}u$ étant tautologiques, on a les équivalences*
$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}u = \mathrm{Ker}u^2 &\iff \dim \mathrm{Ker}u = \dim \mathrm{Ker}u^2 \\ &\iff \mathrm{rg}u = \mathrm{rg}u^2 && \textit{(théorème du rang)} \\ &\iff \mathrm{Im}u = \mathrm{Im}u^2.\end{aligned}$$
   Ces deux assertions, équivalentes, sont donc également équivalentes à leur conjonction, elle-même équivalente à $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$ d'après la question précédente.
3. *Non. Si on considère les contre-exemples classiques*
$$\mu_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \partial : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P', \end{array}$$
   on a
   - *μ_X est injectif, donc $\mathrm{Ker}\mu_X = \mathrm{Ker}\mu_X^2 = \{0\}$, alors que $X \in \mathrm{Im}\mu_X \setminus \mathrm{Im}\mu_X^2$;*

- *dualement, ∂ est surjectif, donc* $\mathrm{Im}\partial = \mathrm{Im}\partial^2 = \mathbb{R}[X]$*, alors que* $X \in \mathrm{Ker}\partial^2 \setminus \mathrm{Ker}\partial$.

Donc aucune des implications n'est vraie.

Exercice 24. Un cas particulier du lemme des noyaux. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On suppose que* $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. *Justifier le plus efficacement possible l'inclusion* $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. *Montrer que* $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ *et* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ *sont supplémentaires dans E.*

Correction.

1. *De manière générale, on a* $f^3 - \mathrm{Id}_E = (f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E)$ *(c'est l'identité de Bernoulli avec f et Id_E qui commutent).*
Par hypothèse, on a $f^3 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$*, d'où*
$$(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \;=\; 0_{\mathcal{L}(E)}$$
On en déduit que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

2. *Montrons que* $I := \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ *et* $K := \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ *sont supplémentaires dans E en montrant que*
$$\begin{cases} I \cap K &= \{0_E\} \\ \dim E &= \dim I + \dim K. \end{cases}$$
   - *Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}_E$ de E (qui est bien de dimension finie). On obtient :*
   $$\dim E \;=\; \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \;+\; \dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$$
   d'où l'égalité $\dim E = \dim I + \dim K$.
   - *Montrons que* $I \cap K = \{0_E\}$.
   Soit $x \in I \cap K$.
   D'après la question précédente, on a $I \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
   On a donc
   $$\begin{cases} x \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \\ x \in K = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \end{cases}$$
   c'est-à-dire
   $$\begin{cases} (f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \\ (f - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \end{cases}$$
   d'où
   $$\begin{cases} (f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \\ f(x) = x \end{cases}$$
   En exploitant la deuxième égalité, la première égalité fournit $3x = 0_E$*, d'où* $x = 0_E$.

Exercice 25. Étude d'un projecteur. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$.*

1. *Montrer que u est bijective.*
2. *On suppose maintenant que F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.*
   (a) *Montrer que u induit un automorphisme de F.*
   (b) *Si p est un projecteur de E d'image F, montrer que $\pi = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{-k}$ est un projecteur de E d'image F.*
   (c) *En déduire que F possède un supplémentaire stable par u.*

Correction.

1. $u \circ u^{n-1} = \mathrm{Id}_E$ donc $\boxed{u \text{ est bijective et } u^{-1} = u^{n-1}}$.

2. (a) Sq F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, i.e. $u(F) \subset F$.
   Soit $v : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$. En tant que restriction d'application linéaire et injective, v est encore linéaire et injective. Puisque $v \in \mathcal{L}(F)$ et F est de dimension finie, on a équivalence entre v injective et v bijective. Donc $v \in \mathrm{GL}(F)$.

   (b) Soit p un projecteur de E d'image F.
   - Soit $x \in E$. Comme p est un projecteur sur F, on a $(p \circ u^{-k})(x) = p(u^{-k}(x)) \in F$. Comme u induit un endomorphisme de F, il en est de même de chacune de ses puissances positives, et donc
   $$(u^k \circ p \circ u^{-k})(x) = u^k((p \circ u^{-k})(x)) \in F.$$
   Par combinaison linéaire, on en déduit $\pi(x) \in F$. Donc $\mathrm{Im}(\pi) \subset F$.
   - Soit $y \in F$. Comme u induit un automorphisme de F, il en est de même de chacune de ses puissances négatives, et donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ u^{-k}(y) \in F$.
   Comme p est un projecteur sur F, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a donc $(p \circ u^{-k})(y) = p(u^{-k}(y)) = u^{-k}(y)$, ce qui entraîne $(u^k \circ p \circ u^{-k})(y) = (u^k \circ u^{-k})(y) = y$. Il est alors immédiat que $\pi(y) = y$. Ainsi, $F \subset \mathrm{Im}(\pi)$.
   - De ces deux points on déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(\pi) = F}$ et $\forall x \in E,\ \pi(\pi(x)) = \pi(x)$ et donc $\underline{\pi^2 = \pi}$.
   De plus $\underline{\pi \in \mathcal{L}(E)}$ donc $\boxed{\pi \text{ est un projecteur d'image } F}$.

   (c) Soient S un supplémentaire de F dans E, p le projecteur sur F parallèlement à S et $\pi = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{-k}$. Alors, d'après le début de la question, π est un projecteur d'image F, donc on sait que $E = \mathrm{Im}\pi \oplus \mathrm{Ker}\pi$. En posant $\boxed{G = \mathrm{Ker}\pi}$, on a $E = F \oplus G$. Il reste à prouver que G est stable par u.
   - On peut montrer que $\pi \circ u = u \circ \pi$, en montrant que $u \circ \pi \circ u^{-1} = \pi$.

     En effet, $u \circ \pi \circ u^{-1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{-(k+1)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{-k} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{-k}$
     car on a $u^n \circ p \circ u^{-n} = p = u^0 \circ p \circ u^{-0}$, vu que $u^n = \mathrm{Id}_E = u^0$.

- *Montrons que G est stable par u.*
  Soit donc $x \in G = \mathrm{Ker}\pi$.
  On a alors : $\pi(u(x)) = u(\pi(x)) = u(0) = 0$ et donc $u(x) \in G = \mathrm{Ker}\pi$, ce qui prouve que $\pi(G) \subset G$.

Par suite, $\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ stable par } u}$.

Exercice 26. Supplémentaire commun. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F_1 et F_2 deux ssev de E, de même dimension. Montrer l'existence d'un supplémentaire commun à F_1 et F_2.*

Correction.

- **Remarque .** *Montrons que si on a $F_1 \subsetneq E$ ou $F_2 \subsetneq E$, alors il existe $x_0 \notin F_1 \cup F_2$.*
  Procédons par contraposée. Supposons $\forall x \in E, x \in F_1 \cup F_2$. Alors $E \subset F_1 \cup F_2$ d'où $F_1 \cup F_2 = E$ est un $\mathbb{K}$-ev, donc $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. Dans tous les cas, par égalité des dimensions, on a $F_1 = F_2 = F_1 \cup F_2 = E$, CQFD.

- **Méthode 1** *(récurrence finie décroissante sur la dimension des F_i). Montrons pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la proposition $H(p)$: « si F_1 et F_2 sont deux ssev de E de dimension p alors F_1 et F_2 possèdent un supplémentaire commun dans E ».*

  - *$H(n)$? Si $p = n$, alors $F_1 = F_2 = E$ qui ont pour supplémentaire commun $\{0_E\}$ dans E, d'où l'initialisation.*
  - *$\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ H(p+1) \Rightarrow H(p)$? Soient $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $H(p+1)$ et F_1 et F_2 de dimension p. Puisque $p \leq n-1$, F_1 et F_2 sont différents de E, donc d'après la remarque il existe $x_0 \notin F_1 \cup F_2$.*
    Les ssev $F_1 \oplus \mathrm{Vect}\,(x_0)$ et $F_2 \oplus \mathrm{Vect}\,(x_0)$ sont de dimension $p+1$ (les sommes sont directes car s'il existait $x \in F_1 \cap \mathbb{K}x_0$ et non nul alors $x \in F_i$ et on pourrait trouver $\lambda \neq 0$ tel que $x = \lambda x_0$ et $x_0 = \frac{1}{\lambda} x \in F_i$: absurde !) donc par HR, ces ssev ont un supplémentaire commun dans E, que l'on notera S. Dès lors, $\mathrm{Vect}\,(x_0) \oplus S$ est un supplémentaire commun à F_1 et F_2 dans E, ce qui prouve l'hérédité.

- **Méthode 2.** *Notons $d = \dim(E) - \dim(F_i)$ la codimension des F_i. Par récurrence finie sur $d \in [\![0, n]\!]$.*

  - *Si $d = 0$, alors $F_1 = E = F_2$, donc $\{0_E\}$ est un supplémentaire commun.*
  - *Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$ tel que la propriété est vraie pour d. Soient F_1 et F_2 de codimension $d+1$. Alors $\dim(F_i) < n = \dim E$ donc $F_i \subsetneq E$ et d'après la remarque, il existe $x_0 \in F_1 \cup F_2$.*
    Notons $G_1 = F_1 \oplus \mathbb{K}x_0$ et $G_2 = F_2 \oplus \mathbb{K}x_0$.
    (les sommes sont bien directes car ...). Alors les G_i sont de codimension d, et par HR, ils possèdent un supplémentaire commun, que l'on notera S. On a donc : $E = F_1 \oplus \underbrace{\mathbb{K}x_0 \oplus S}_{=:T}$ et $E = F_2 \oplus \underbrace{\mathbb{K}x_0 \oplus S}_{T}$. Ainsi, T est un supplémentaire commun à F_1 et F_2, ce qui donne l'hérédité et conclut.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 27. Équation d'hyperplan. *Soient* $u_1 = (1, -2, 1)$ *et* $u_2 = (1, 2, 3)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer une équation de l'hyperplan* $\text{Vect}(u_1, u_2)$.

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Comme la famille (u_1, u_2) *est libre, on a l'équivalence :*

$$v \in \text{Vect}(u_1, u_2) \iff (u_1, u_2, v) \text{ liée}$$

Cette dernière condition équivaut à dire que la famille des trois vecteurs colonnes (U_1, U_2, V) *est liée, c'est-à-dire que le système homogène ayant pour matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{pmatrix}$ *possède une solution non triviale.*
En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, on ne change pas l'ensemble des solutions du système.
On se ramène au système triangulaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 4 & y + 2x \\ 0 & 0 & -4x - y + 2z \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$(x, y, z) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \iff -4x - y + 2z = 0$$

Remarque 1. *On peut vérifier (cela ne coûte rien) que les coordonnées de* u_1*, à savoir* $(1, -2, 1)$*, satisfont l'équation précédente. Idem pour* u_2.
Remarque 2. *Avec l'outil « déterminant » (patienter jusqu'en mai), on a directement l'équivalence :*

$$\begin{aligned} v \in \text{Vect}(u_1, u_2) &\iff \det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(u_1, u_2, v) = 0 \\ &\iff \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Exercice 28. Sous-espace vectoriel strict inclus dans un hyperplan. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E.
Montrer que $\dim F < \dim E$*, si et seulement si,* F *est inclus dans un hyperplan de* E.

Correction.

- $\boxed{\Rightarrow}$ *Notons* $p = \dim(F)$ *et* $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ *et supposons* $p < n$.
  Considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* F *et complétons-la en une base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* E. *Le sous-espace vectoriel* $H := \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ *est alors un hyperplan de* E*, et il contient* F *puisque* $p \leq n - 1$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, s'il existe un hyperplan* H *de* E *contenant* F*, alors* $\dim F \leq \dim H = \dim E - 1 < \dim E$.

- **Conclusion :** *en dimension finie,* $F \subsetneq E \Longrightarrow F \subset H \subset E$ *avec* H *hyperplan.*

Exercice 29. Intersection avec un hyperplan. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* H *un hyperplan de* E*.*
Montrer que $\dim(F \cap H) \geq \dim F - 1$*. Dans quel cas a-t-on égalité ?*

Correction. *Notons* $n = \dim E$*. La formule de Grassmann assure que :*

$$\begin{aligned} \dim(F \cap H) &= \dim F + \dim H - \dim(F + H) \\ &= \dim F + n - 1 - \dim(F + H) \\ \dim(F \cap H) &= (\dim F - 1) + (n - \dim(F + H)). \end{aligned}$$

- *Puisque* $F + H$ *est un ssev de* E*, on a* $\dim(F + H) \leq n$ *d'où d'après l'égalité précédente :* $\boxed{\dim(F \cap H) \geq \dim F - 1}$.
- *De plus, on a :* $\dim(F \cap H) = \dim F - 1 \Longleftrightarrow \dim(F + H) = n = \dim(E) \Longleftrightarrow F + H = E$ *(car* $F + H$ *est un ssev de* E*) donc* $\boxed{\dim(F \cap H) = \dim F - 1 \Longleftrightarrow F + H = E}$.
- **Alternative.** *Puisque* $F \cap H \subset F$*, on a :* $\dim(F \cap H) \leq \dim(F)$*, donc*

$$\dim F - 1 \leq \dim(F \cap H) \leq \dim F,$$

  d'où $\dim(F \cap H)$ *vaut* $\dim F - 1$ *ou* $\dim F$*.*
  Or, $\dim(F \cap H) = \dim F \Longleftrightarrow F \cap H = F \Longleftrightarrow F \subset H$*.*
  Donc $\boxed{\dim(F \cap H) = \dim F - 1 \Longleftrightarrow F \not\subset H}$.
- *On retiendra qu'en intersectant avec un hyperplan, on perd au plus une dimension.*

Exercice 30. Intersection de plusieurs hyperplans. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$*, et* $r \in [\![1, n]\!]$*. Montrer que :*

1. *l'intersection de* r *hyperplans de* E *est un sous-espace vectoriel de* E *de dimension au moins* $n - r$*.*
   Indication : *on pourra par exemple utiliser le rang de* $u : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^r \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)) \end{array}$*, où* $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ *sont des formes linéaires non nulles.*
2. *tout sous-espace vectoriel de dimension* $n - r$ *est l'intersection de* r *hyperplans de* E*.*

Correction.

1. **Méthode 1.** *Soient* $H_1, \dots, H_r$ *des hyperplans de* E*. Pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$*, notons* φ_i *une forme linéaire non nulle dont* H_i *est le noyau.*
   L'application $u : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^r \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)) \end{array}$ *est linéaire, de noyau* $H_1 \cap \dots \cap H_r$ *et* E *est de dimension finie, donc d'après le théorème du rang appliqué à* u*, on a :*

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) &= \dim(E) - \mathrm{rg}(u) \\ &\geq n - r \qquad\qquad \text{car } \mathrm{rg}(u) \leq r \end{aligned}$$

(le rang d'une application linéaire est toujours inférieur à la dimension de l'espace d'arrivée).

Méthode 2. *Par récurrence finie sur* $r \in [\![1, n]\!]$. *Pour l'hérédité : soit* $r \in [\![1, n-1]\!]$ *tel que* $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_r) \geq n - r$. *Alors, puisque* H_{r+1} *est un hyperplan, et d'après l'exercice précédent, on a :*

$$\dim((H_1 \cap \cdots \cap H_r) \cap H_{r+1}) \geq \dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) - 1 \geq n - r - 1 = n - (r+1).$$

2. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension* $n - r$.
Grâce au TBI, on peut considérer une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de* E *dont les* $n - r$ *derniers vecteurs forment une base de* F *(i.e.* $F = \mathrm{Vect}\,(e_{r+1}, \ldots, e_n)$*).*
Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, *on a*

$$x \in F \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_r = 0.$$

En notant pour tout $k \in [\![1, r]\!]$,

$$\begin{aligned} H_k &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \;\middle|\; x_k = 0 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n) \\ &= \mathrm{Ker}(\varphi_k), \end{aligned}$$

avec φ_k *l'unique application linéaire de* $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *telle que* $\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\},\ \varphi_k(e_i) = 0$ *et* $\varphi_k(e_k) = 1$ *(donc* φ_k *non nulle), i.e.* φ *est l'application qui à* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *de* E *associe* x_k.
Avec l'une ou l'autre des définitions précédentes, on obtient que H_k *est donc un hyperplan de* E *et on a :*

$$x \in F \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, r]\!],\ x \in H_k \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{r} H_k,$$

d'où $\boxed{F = \bigcap_{k=1}^{r} H_k \text{ est l'intersection de } r \text{ hyperplans de } E}$.

Exercice 31. Intersection de deux hyperplans. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geq 2$ *et* H_1 *et* H_2 *deux hyperplans distincts de* E. *Calculer la dimension de* $H_1 \cap H_2$.

Correction. *D'une part, d'après un des deux exercices précédents,* $\underline{\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2}$.

Méthode 1. *Pour $i \in \{1,2\}$, considérons φ_i une forme linéaire non nulle telle que $H_i = \mathrm{Ker}\varphi_i$, et* $\psi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^2 \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{array}$. *On a $\mathrm{Ker}\psi = H_1 \cap H_2$ et $\mathrm{rg}\psi \leq 2$. D'après le théorème du rang appliqué à ψ, on a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim E - \mathrm{rg}\psi \geq n-2$.*

Méthode 2. *D'après la formule de Grassmann*

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2) &= \dim(H_1) + \dim(H_2) - \underbrace{\dim(H_1 + H_2)}_{\leq \dim E} \\ &\geq 2(n-1) - \dim(E) \\ &\geq n-2. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $H_1 \neq H_2$, on a $H_1 \cap H_2 \subsetneq H_1$ donc $\underline{\dim(H_1 \cap H_2) < \dim(H_1) = n-1}$.
On en déduit que $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n-2}$.

Exercice 32. Forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Soit* $\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^* \\ A & \mapsto & \phi_A \end{array}$ *où* $\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$.

1. *Montrer que ϕ est un isomorphisme.*
2. *Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*
   Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $H = \{M \in E \mid \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$.

Correction.

1. - *ϕ est linéaire car la trace l'est.*
   - *$\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = n^2 < \infty$ donc d'après le cours, ϕ injective $\Leftrightarrow$ ϕ bijective $\Leftrightarrow$ ϕ surjective.*
   - *Montrons que $\underline{\phi \text{ est injective}}$, i.e. $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.*
     Soit $A \in \mathrm{Ker}\phi$. Alors $\phi_A = 0$ donc $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(AM) = 0$.
     En particulier, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = 0$.
     Rappelons que $AE_{i,j}$ correspond à une matrice $n \times n$ ne contenant que la i-ème colonne de A à la j-ème colonne (cf dessin matriciel). Donc $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i} = 0$, cela étant valable pour tout (i,j), on en déduit que $A = 0$.

     Preuve par le calcul. $(AE_{i,j})_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{p,k}(E_{i,j})_{k,q} = a_{p,i}(E_{i,j})_{i,q} = \begin{cases} a_{p,i} \text{ si } q = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
     Donc :
     - *la j-ème colonne de $AE_{i,j}$ est la i-ème colonne de A ;*
     - *les autres sont nulles.*
     - *$(AE_{i,j})_{j,j} = a_{j,i}$ et $\forall k \neq j,\ (AE_{i,j})_{k,k} = 0$, donc $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.*
   - *Ainsi, $\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme}}$.*
2. *Il s'agit de trouver $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $H = \mathrm{Ker}\phi_A$.*
   H est un hyperplan donc il s'écrit comme le noyau d'une forme linéaire (non nulle) φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   ϕ est un isomorphisme, donc en particulier une application surjective et $\varphi \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*$, donc il

existe $A \in E$ *tel que* $\varphi = \phi_A$.
D'où $H = \mathrm{Ker}\phi_A$*, ce qui conclut.*