Exemple 2.44. *Soient* $x = (1,2,1)$, $e_1 = (1,0,-1)$, $e_2 = (1,-1,0)$ *et* $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$.
Déterminer $\mathrm{d}(x, F)$.

1ère méthode : avec une BON.

- $\mathrm{d}(x,F) = \|x - p_F(x)\|$. *Munissons* $\mathbb{R}^3$ *de son produit scalaire canonique.*
- *Déterminons une BON de* F. *La famille* (e_1, e_2) *est libre (vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de* F. *Orthonormalisons-la !*
  Posons $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$. *Or,* $\|e_1\| = \sqrt{2}$ *donc* $\underline{f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}$.
  Posons $g_2 = e_2 - (e_2|f_1)f_1$. *Comme* $(e_2|f_1)f_1 = \dfrac{1}{2}(e_2|e_1)e_1 = \dfrac{1}{2}e_1$, *on a :* $g_2 = e_2 - \dfrac{1}{2}e_1 = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ *et* $||g_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. *Posons alors* $\underline{f_2 =} \dfrac{g_2}{||g_2||} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}) = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)}$.
- *Déterminons* $p_F(x)$.
  (f_1, f_2) *est une BON de* F *avec* $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ *et* $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ *donc :*
  $$p_F(x) = (x|f_1)f_1 + (x|f_2)f_2.$$
  or, $(x|e_1) = 0$ *donc* $(x|f_1) = 0$ *et* $(x|f_2)f_2 = \frac{-2}{\sqrt{6}}f_2 = -\frac{1}{3}(1,-2,1) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. *Ainsi,*
  $$\underline{p_F(x) = (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3})} \quad \textit{puis} \quad \underline{x - p_F(x) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3}(1,1,1)}.$$
- *Conclusion :* $\|x - p_F(x)\| = \frac{4}{3}||(1,1,1)|| = \frac{4}{3} \times \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. *Finalement :* $\boxed{\mathrm{d}(x,F) = \frac{4}{\sqrt{3}}}$.

2ème méthode : en utilisant l'appartenance à F et $F^\perp$ et en résolvant un système.

D'une part, $p_F(x) \in F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ *donc il existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $p_F(x) = ae_1 + be_2 = (a+b, -b, -a)$. *Alors* $x - p_F(x) = (1-a-b, 2+b, 1+a)$.
D'autre part, $x - p_F(x) \in F^\perp$ *donc* $\langle x - p_F(x), e_1\rangle = 0$ *et* $\langle x - p_F(x), e_2\rangle = 0$. *Ainsi,* a *et* b *sont solutions du système :* $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -2/3. \end{cases}$
Donc $x - p_F(x) = \frac{4}{3}(1,1,1)$. *Finalement,*

$$\boxed{d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \frac{4}{3}\,\|(1,1,1)\| = \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}}.$$

3ème méthode : en calculant $F^\perp$.

Déterminons $F^\perp$. *Soit* $z = (z_1, z_2, z_3)$. *On a :* $z \in F^\perp \Leftrightarrow \langle z, e_1\rangle = \langle z, e_2\rangle = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = z_3$, *donc* $F^\perp = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$.
En notant $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, (u) *est une BON de* $F^\perp$, *donc* $\underline{p_{F^\perp}(x) = \langle x, u\rangle\, u = \frac{4}{3}(1,1,1)}$ *et*

$$\boxed{d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \frac{4}{3}\,\|(1,1,1)\| = \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}}.$$