

Programme de la colle 26

Semaine du 02/06/2025.

Pas de démonstrations de cours (mais le cours pourra être testé à travers les exercices)

Le thème de cette **dernière colle** est intégration, espaces préhilbertiens réels et séries numériques.

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Fonctions en escalier

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.
Fonction en escalier.
Intégrale d'une fonction en escalier.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans \mathbb{R} .

b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans \mathbb{R} .

Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.
Propriétés correspondantes.

Si f est continue, à valeurs dans \mathbb{R}^+ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

c) Sommes de Riemann

Pour f continue sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.

La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.

d) Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

e) Inégalité de Taylor-Lagrange

Inégalité de Taylor-Lagrange.

La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).

f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans \mathbb{C} .
Linéarité, majoration du module de l'intégrale.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

a) Produit scalaire

Produit scalaire.
Espace préhilbertien, espace euclidien.
Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .
Produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.Expression $X^T Y$.Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.**b) Norme associée à un produit scalaire**

Norme associée à un produit scalaire, distance.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
Identité remarquable $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Exemples : sommes finies, intégrales.

Formule de polarisation associée.

c) Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Théorème de Pythagore.
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Notation X^\perp .

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

d) Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F .

Distance d'un vecteur à F .

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F .

En dimension finie : dimension de F^\perp , vecteur normal à un hyperplan.

Notation $d(x, F)$.

Séries numériques

Cette section a pour but de prolonger l'étude des suites et de permettre d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique pour étudier les séries numériques. La notion de suite sommable est introduite mais n'appelle aucun développement théorique.

a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.
Convergence, divergence, somme.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Divergence grossière.

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

b) Séries à termes positifs ou nuls

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de \mathbb{R}^+ diverge.

Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n) .

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbb{R}^+ , si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

Somme d'une suite sommable.