Programme de la colle 25

Semaine du 19/05/2025.

Démonstration du cours d'intégration :

1. Inégalité triangulaire intégrale pour une fonction continue par morceaux sur un segment.
2. Positivité stricte de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux (c.p.m.) sur un segment : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est c.p.m. et strictement positive sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
3. Intégrale d'une fonction périodique sur une période.
4. Inégalité de Taylor-Lagrange : $\forall f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,K),\ \forall (a,x) \in I^2,\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$, où M_{n+1} est un majorant de la fonction $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[\min(a,x), \max(a,x)]$.
   N.B. : la formule de Taylor avec reste intégral pourra être rappelée par le colleur.
5. Convergence des sommes de Riemann dans le cas où f est lipschitzienne sur un segment $[a,b]$.

Probabilités sur un univers fini

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini. Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$. Probabilité uniforme.	Espace probabilisé fini (Ω, P).
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalité de Taylor-Lagrange.	