

Programme de la colle 23

Semaine du 05/05/2025.

Pas de question de cours.

Matrices et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel);
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et d'un vecteur;

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.

Isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.

Cas particulier des endomorphismes.
Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.

b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Noyau, image et rang d'une matrice.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace \mathbb{K}^n ou si et seulement si son rang est n .

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Invariance du rang par transposition.

On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n .

Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Lien entre les diverses notions de rang.

Application : calcul du rang.

Ce résultat est admis.

c) Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.

Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Matrices semblables.

Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

d) Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A .

Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Équations différentielles

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu;
- le calcul de dérivées et de primitives;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction a est constante.

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

La démonstration de ce résultat est hors programme.